

論証を始める

III.1 三平方の定理を見出す

2018年9月

岩間憲三

### III-1. 三平方の定理を見出す — 関係を組み上げることで

機械が三平方の定理を発見する。機械が元から保持する抽象化の機能・能力は、対象が何であれ、その端から端までの長さ（視線 / 自身を移動する量）を記号で表し使う仕組みを作る；対象の長さを紐 / 木に取り込む、長さを何か（紐 / 木）の長さの繰り返しで表す（つまり測る）、あらかじめ決めた長さを対象の長さとする（描く）、また、描いた長さ（対象にした長さ）があるとする。元から保持する機能・能力は、何と何が、互いに共通することを持つか探す。さらに、機械は、さらなる機能・能力を保持するが、それらについては、本文で都度、明らかにする。

機械は、元から保持する機能・能力を使うことで、いくつかの規則を得ている；決めた方向で2つの線を合わせて1つの線にする、広さと広さを合わせ、もうひとつの広さにする、描かれた線を辺とする正方形を描く、測った結果（測定値）が決まっているのを組み合わせ、決まっていないのを決める（値を求める）。元から保持する機能・能力は、何と何が共通するか探して、それを括り出すが、括り出したことを使って、さらに、共通することを見出す。そこで、共通しないことを変えて、変えても共通することが成り立つか調べる（言い換えると、いくつかの例で成り立つことが分かると、他の例も成り立つか調べる）。さらに、機械は、規則を得ているが、それらを、本文で都度、明らかにする。

機械が、三平方の定理を見出す過程のあらまは以下の通りだ。まず、辺の長さが、3, 4, 5, あるいは、5, 12, 13, あるいは、8, 15, 17, となる直角三角形があることを与える。3, 4の辺を、その間が直角になるように与える。斜辺を測ると5であり、 $3 \times 3 + 4 \times 4 = 5 \times 5$ が成り立つことを与える。その他の場合も、同じように与える。

それらを得ると、機械は、値を入れ替えると、関係が成り立つか調べる。2つの辺の長さを1, 1とすると、斜辺の長さを測ると1.4と少し。2つの辺の長さを1, 2とすると、斜辺の長さを測ると2.2と少しと言う。同じことを得た、別の機械は、斜辺の長さを測ると1.5より少し小さい。あるいは2.3より少し小さいと言う。

さらに、別の機械は、機械が、斜辺の長さを言うのを得ると、何であれ対象の長さを言うときは、長さは同じ。機械<sub>1</sub>が何か対象の長さを…と言う。機械<sub>2</sub>が同じ対象の長さを…と言うとすると、…と…は同じで、長さは1つだと言う。

機械の間で、言うことが一貫しない。長さが同じになることを目標にしてみる。目標への過程が見いだせない。保留とする。

次に、人が、機械に、この正方形の広さを2倍にすると言う。(人が機械に言うのは、機械が偶然出会っただろうことだ。)そして、タイルが敷き詰めてあるところを見せる。機械は、以下を見出す。三角形のタイル2つで正方形1つ。三角形4つで、大きい正方形1つ。大きい正方形の広さは正方形の2倍。タイルの端の長さが1なら、大きい正方形の広さは2。大きい正方形の辺の長さは、三角形の斜辺の長さであり、正方形の対角線の長さ、それかけるそれが2となるような長さだ。

三角形の斜辺の長さ、あるいは正方形の対角線の長さは、それに自身をかけると2になるような長さだ。ここで、機械は、保留していることと共通することを見出す。斜辺の長さは、それかけるそれが2となるような長さだと言う。別の機械も、同じことを言う。

機械は、さらに、2つの辺の長さが1と2の直角三角形があると、その斜辺の長さは、それかけるそれが5となるような長さだ。 $1 \times 1 + 2 \times 2 = \text{斜辺の長さ} \times \text{斜辺の長さ}$ だと言う。

機械は、長さについて、測った長さで言うのではなく、線を描いて、この長さとするのを取り上げる。そして、直角三角形の辺がこれ、もう1つの辺がこれなら、辺の長さかける自身ともう1つの辺の長さかける自身は、斜辺の長さかける斜辺の長さは成り立つか調べる。

機械は、三角のタイルの組み合わせ、そして2つの辺の長さが1と2の直角三角形と辺の上の正方形と、描いた直角三角形およびその辺を1辺とする正方形の組み合わせを、対応付ける。そして、2つの正方形の広さが、斜辺を1つの辺とする正方形の広さと同じになることを見出す。三平方の定理の発見となる。

# 1. 三平方の定理を見出すための材料を与える

## 1.1 直角三角形, 3つの辺の長さの間における関係

機械に, 直角三角形があつて, 3つの辺の長さが, 3, 4, 5 ; 5, 12, 13 ; 8, 15, 17 となる  
 のがあることを言う. そして, 次が成り立つことを示す. 直角を作る1つの辺の長さに自身  
 をかけたのと, 直角を作るもう1つの辺の長さに自身をかけたのを加えると, 斜辺の長さ  
 に自身をかけたのに等しい.  $3 \times 3 + 4 \times 4 = 5 \times 5$ ,  $5 \times 5 + 12 \times 12 = 13 \times 13$ ,  $8 \times 8 + 15 \times 15$   
 $= 17 \times 17$ .

外界から

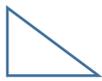
展開する

記憶から取り出したのに

外界から得たのを入れる

記憶から, 以前, 得ている, 作って

いるのを取り出す



→ 直角三角形がある

直角を挟む2つの辺の  
長さを測ると3と4,  
斜辺の長さを測ると5

$3 \times 3 + 4 \times 4 = 5 \times 5$

外界からえたもので  
記憶から取り出せないのを  
そのまま記憶する

← 直角三角形がある

直角

..を挟む

辺の長さ

2つの辺

斜辺の長さ

直角を挟む...

・の長さを測る

..を測る

\_\_ = \_\_

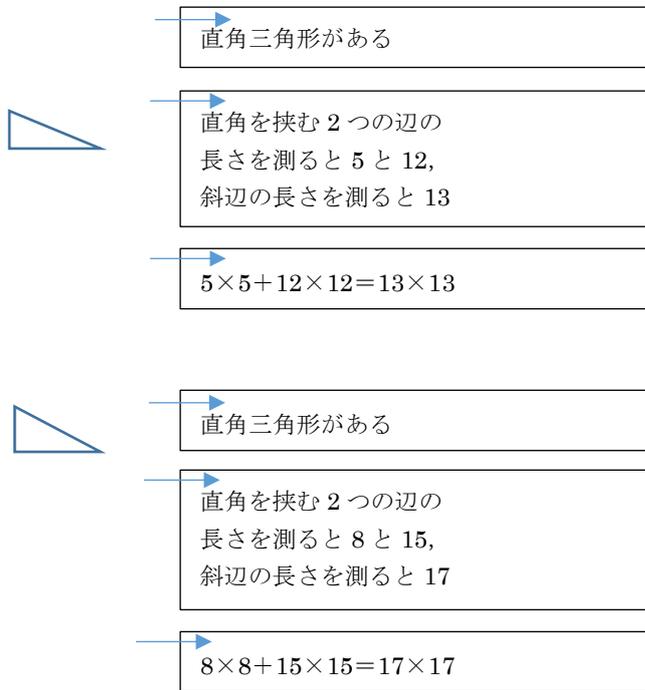
\_\_ + \_\_

\_\_ × \_\_

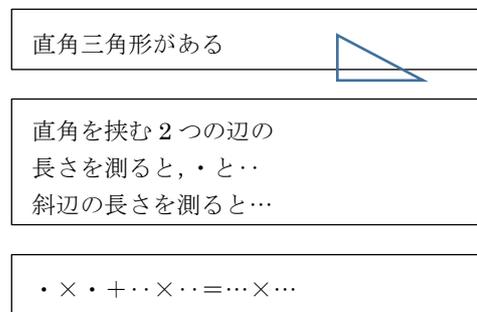
1, 2, 3, 4, 5

数える

記憶から取り出すのを  
示すのを省略



得たことに共通することを見出して保持する

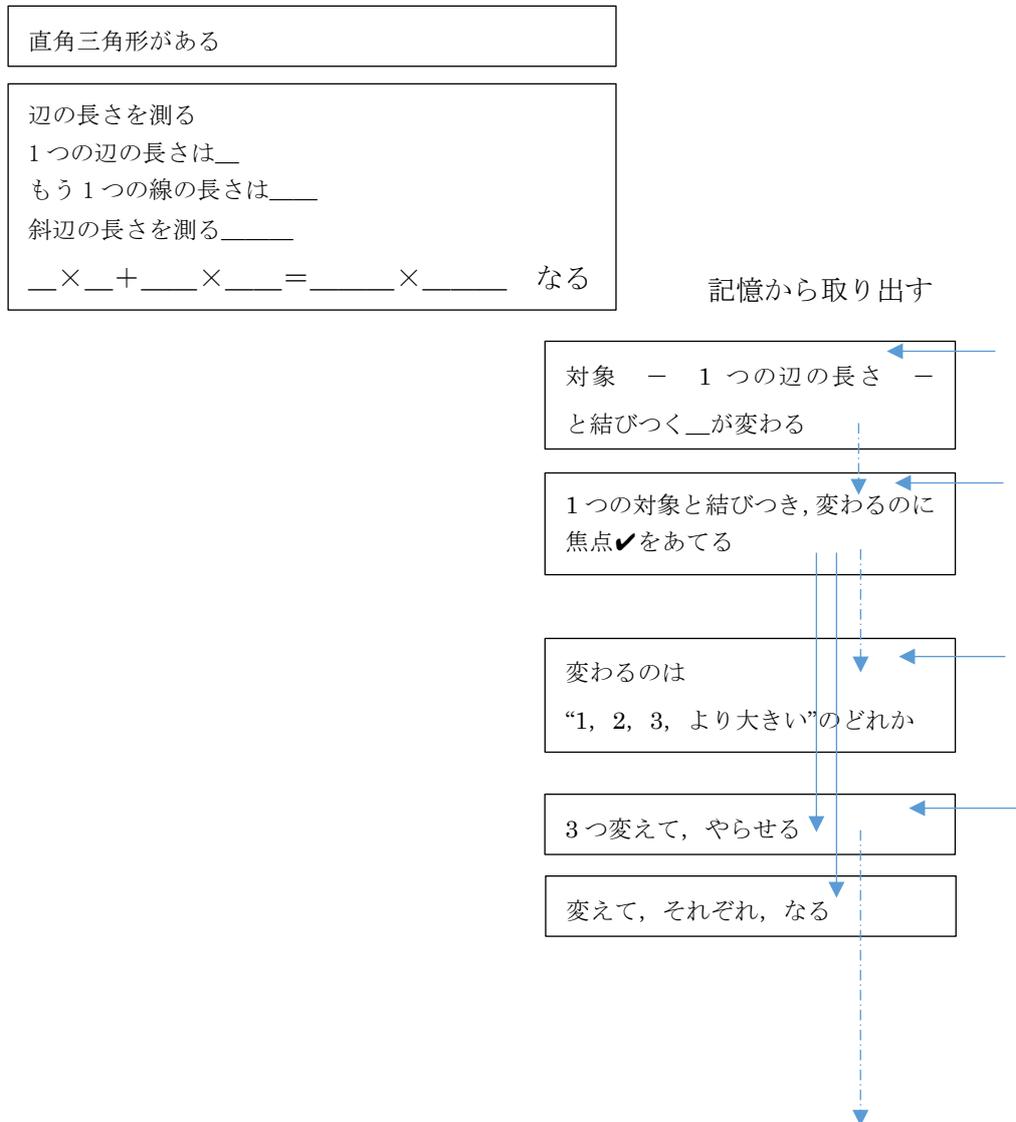


変わるところは, ・, ・, ...だ

図 1. 直角三角形の辺の長さの間における関係. 1 つの辺の長さに自身をかけたのともう 1 つの辺の長さに自身をかけたのを合わせると斜辺の長さかける自身と同じ.

## 1.2 値を入れ替えて調べる

機械は、いくつかの直角三角形で成り立つことを得ると、すでに作りかかっている汎化した仕組み — 変わるところをさらに変えても、共通することは成り立つか（やれるかも含めて）調べる仕組み — を取り出す。その仕組みに、直角三角形、辺の長さ 3, 4, 5 と辺の長さの間にある関係、直角三角形、辺の長さ 5, 12, 13 と辺の長さの間にある関係、直角三角形、辺の長さ 8, 15, 17 と辺の長さの間にある関係を入れる。その仕組みは、1つの辺の長さ、3, 5, あるいは 8 に代わる値を選ぶ。辺の長さが 1 となるように描くと、それを測れば 1 となる。もう 1つの辺の長さが 1 となるように描くと、それを測れば 1 となる。斜辺の長さはどれだけか測る。すると、辺の長さの間にある関係、つまり辺の長さに自身をかけたのを合わせたのは、斜辺の長さに自身をかけたのと同じ、 $1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$  となるか。



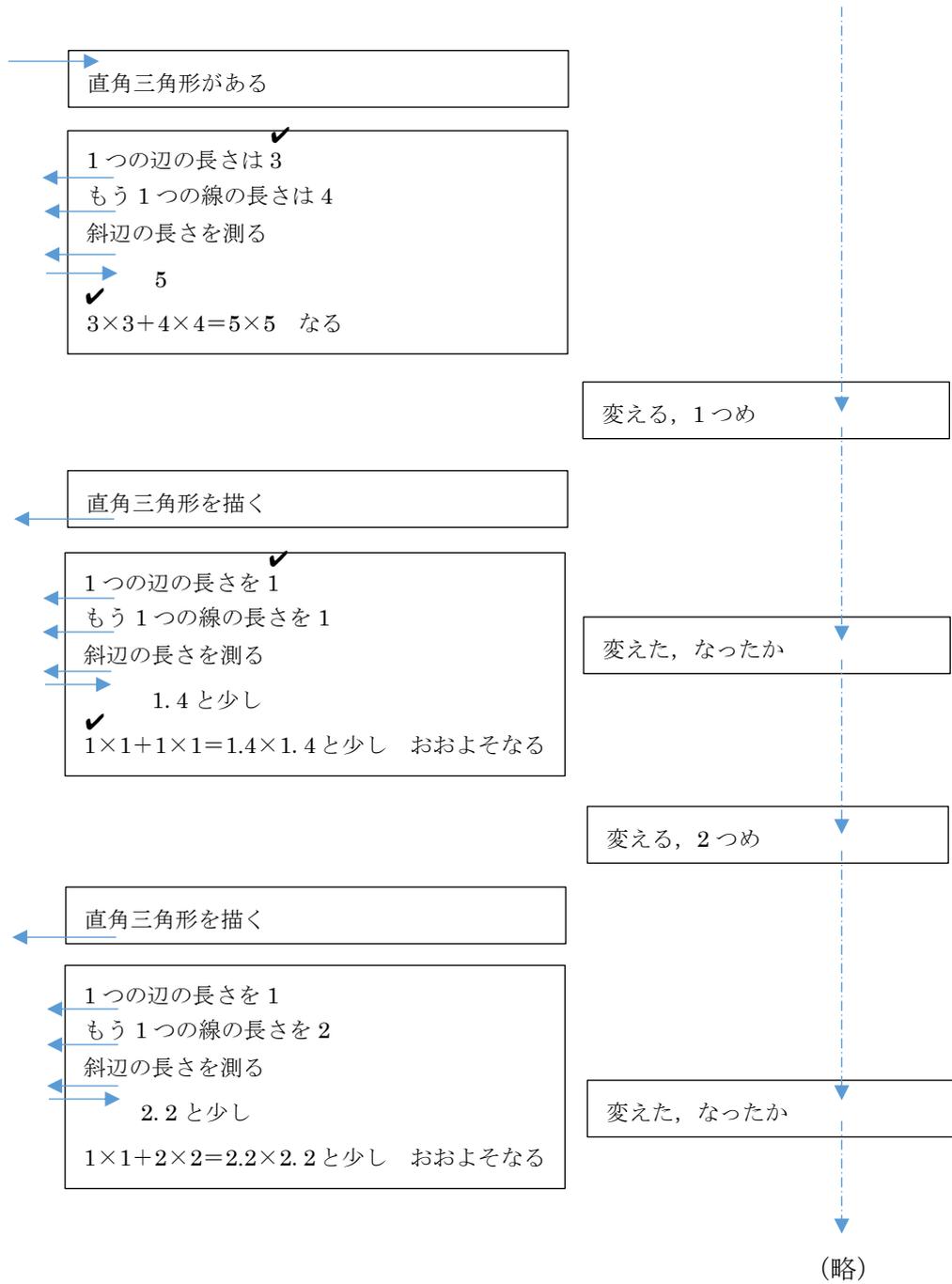


図2. 値を入れ替えてみる. 入れ替えたのをやってみる (やらせてみる).

機械が, 変わるところをさらに変えても成り立つか (やれるかも含めて) 調べる仕組みを, どのように作りはじめるかについては, 別途, 述べる.

## 平方根を求める — 求めるに至る経緯

広さが\_\_となる正方形, その辺の長さを求める. すでに, 機械は, 2つの長さを合わせて別の長さを作ること, 1つの長さを分けて2つの長さを作ることを得ている. また, 目標の長さがあるて, それより短い長さがあると, 別の長さを合わせて, 目標の長さにするて, それより長い長さがあると, それを分けるて目標の長さにするてを得ている. また, 2つの長さを合わせた後, 目標の長さ合えば, 目標達成とする. しかし, 目標の長さより短い, あるいは長い場合に, 目標を変えて, 合わせた結果を目標にするてを得ている.

長さを合わせる, 長さを分けた後, それぞれの長さを測るてを得ている. 1と1を合わせると2, 1と2を合わせると3, 2と半分0.5を合わせると2.5, 2と0.1を合わせると2.1. 2より少し小さい, 2から0.1を分けると, 1.9と0.1. さらに, 何か長さが, 1と0.1を合わせたのより少し長く, 1と0.2を合わせたのより少し短い, あるいは, 2と0.1を合わせたのより少し長く, 2と0.2を合わせたのより少し短いのがあるてを得ている.

辺の長さが分かっている正方形の広さを求めている. 辺の長さが1と1なら広さは1, 1.5と1.5なら2.25, 2と2なら4, 2.5と2.5なら6.25, 3と3なら9, 3.5と3.5なら12.25, 4と4なら16, 4.5と4.5なら20.25, 5と5なら25を得ている. 機械は, 辺の長さが大きくなれば, 広さが大きくなるてを見出している.

そこで, 機械は, 広さが2となる正方形がある, その辺の長さはどれだけか, という問いを得る. 機械は, 広さが2の正方形の辺の長さが記憶にあるか調べる. 広さが2の正方形の辺の長さは記憶にない. 辺の長さ自身をかけると広さになると汎化した仕組みと, 辺の長さが, 1, 2, 3, 4, 5のときの広さを取り出す. しかし, 機械は, 目標に至る過程を持っていないので, 目標は何かという仕組みを取り出す. 目標は, 広さが2の正方形の辺の長さを求めることだ. 汎化した仕組みを作るときに, 変わるとしたのに, 変わるどれかを入れてみる. つまり, 長さ広さの仕組みの長さに, 2を入れてみる. 広さは4. 今得た広さと目標の広さと, 今の長さ目標の長さの関係を得るので, その関係に沿って目標に達するかもしれないてをやる; つまり, 今の広さ4は目標の広さ2より大きい. 今の長さを短くする, 0.1小さくしてみる. 小さくした正方形の広さは, 3.61. 今の長さを0.1小さくしてみる. 小さくした正方形の広さは, 3.24. 今の長さを0.1小さくしてみる. 小さくした正方形の広さは, 2.89. 今の長さを0.1小さくしてみる. 小さくした正方形の広さは, 2.56. 今の長さを0.1小さくしてみる. 小さくした正方形の広さは, 2.25. 今の長さを0.1小さくしてみる. 小さくした正方形の広さは, 1.96.

機械は, 辺の長さを1.5より少し小さいとする.

## 2. 「互いに同じになること」で言う

### 2.1 長さは1つ

機械は、直角三角形の斜辺の長さを求める。機械が測定器の値を読む方法、測定器によって、測った長さは異なる。たとえば、機械 M が測った値は、1.4 より少し大きい。機械 N が測った値は 1.5 より少し小さいなどとなる。また、機械 L は、斜辺×斜辺は 2 になるとして、斜辺の長さを求める。1.41 と少しだと言う。あるいは、機械 M が測った値は、2.2 と少し大きい。機械 N が測った値は 2.3 より少し小さいなどとなる。また、機械 L は、斜辺×斜辺は 5 になるとして、斜辺の長さを求める。2.23 と少しだと言う。

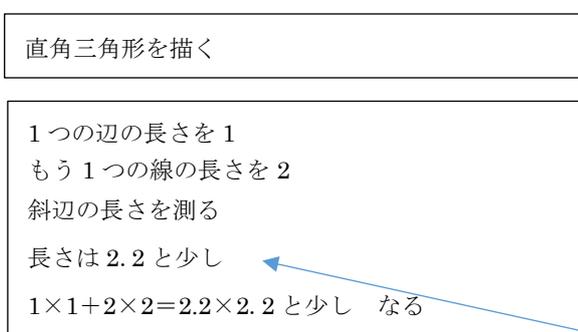
機械 P は、機械 M、機械 N、機械 L が言うことを得る。すると、自分が今までに作ってきたことと合わない。機械 M などが、辺の長さを言うとき、長さが異なる。長さが同じでない。自分が得たことは、どれかの長さを言う時、長さは同じ、長さは1つ。

機械 P が外界から得る

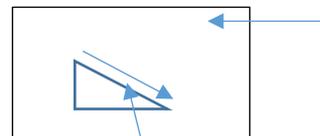
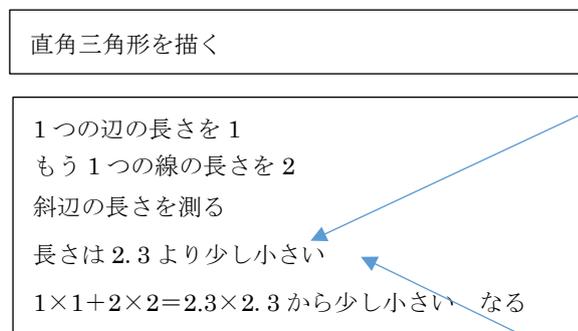
機械 P が記憶から  
取り出す

外界から得ているのと同じかどうかを見る

機械 M

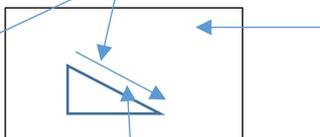


機械 N



同じ

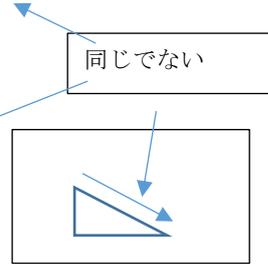
同じでない



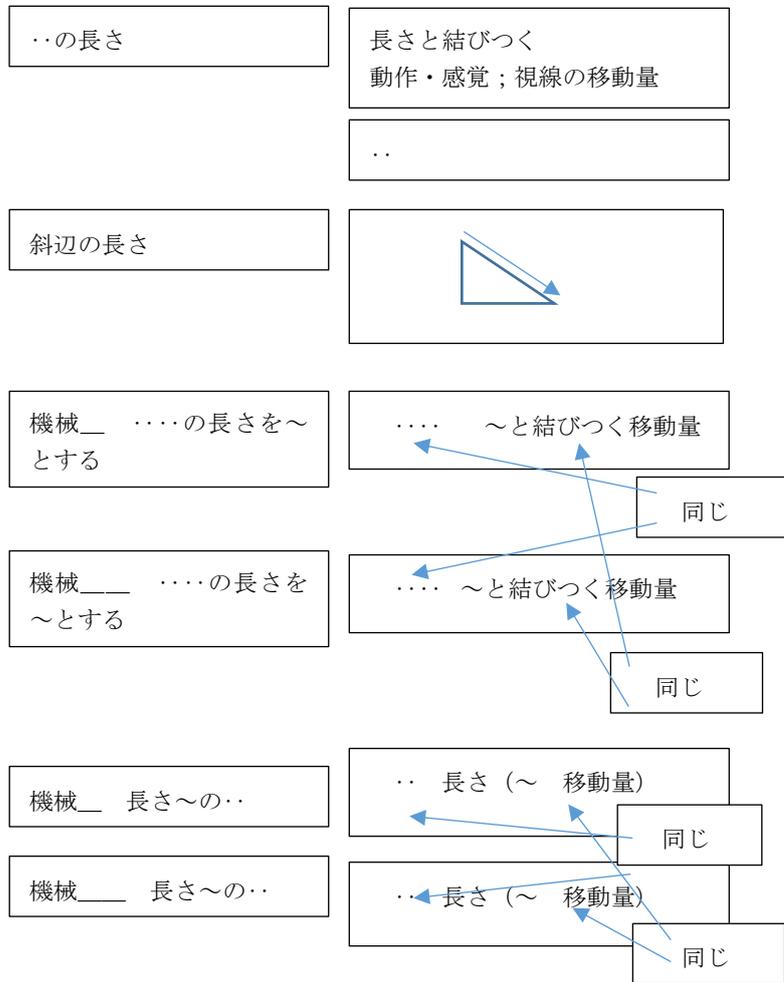
同じ

機械 L

斜辺の長さ×斜辺の長さ=5  
 斜辺の長さを求める。  
 2.21875 と少し  
 $1 \times 1 + 2 \times 2 = 2.21875 \times 2.21875$  と少し なる



機械 P はすでに得ていることを  
 展開する



← 長さは同じ，長さは1つ

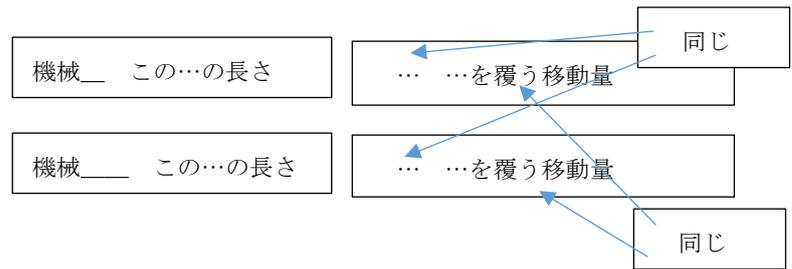


図 4. 長さは同じ，長さは1つと言う．

これら機械が求めたことを得て，機械 P は言う．何であれ，指示することは互いに同じになる．互いに1つになる．長さを指示するとき，長さは同じになる．互いに1つになる．

機械 L 機械 M 機械 N は，機械 P が言うことを，自分の中に展開する．機械 L 機械 M 機械 N は，それぞれ求めた，斜辺の長さが異なること，斜辺の長さは同じことを展開する．全体として，一貫しない．

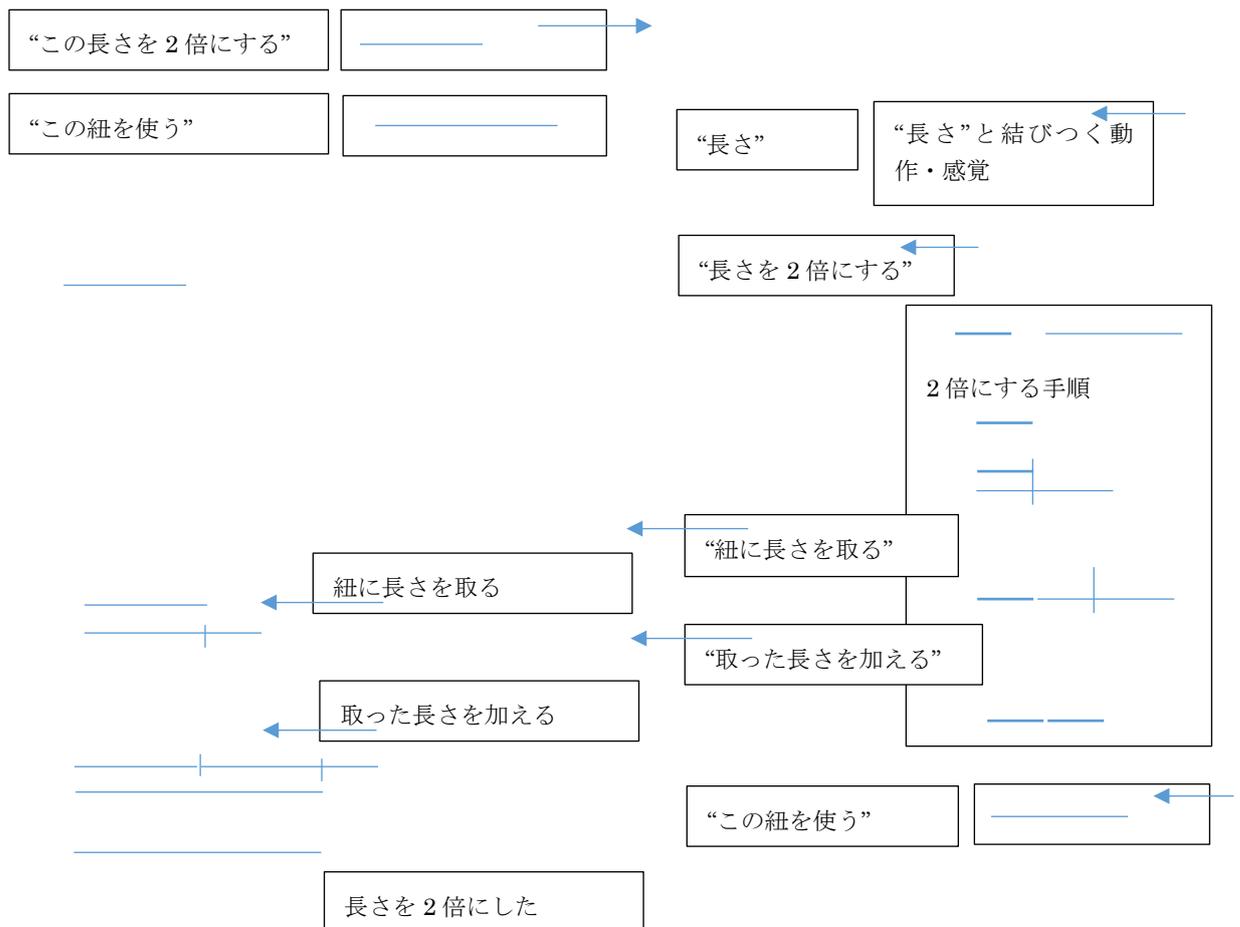
機械 P 機械 L 機械 M 機械 N は，全体を通して一貫することを見出そうとする．今は，斜辺の長さは同じでない．斜辺の長さを同じだと言うのを目標としてみる．目標へのステップがない．保留．

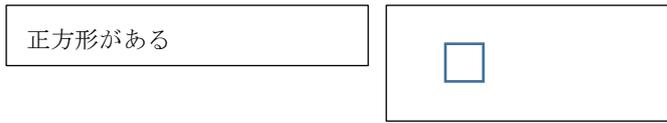
機械 P が，何であれ，指示することは互いに同じになる．互いに1つになる，と言う仕組みを，どのように作るかについては，別途，述べる．

## 2.2 2倍にする

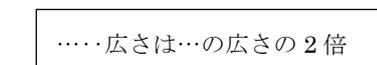
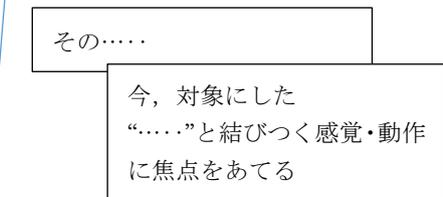
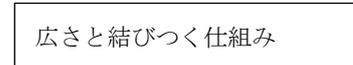
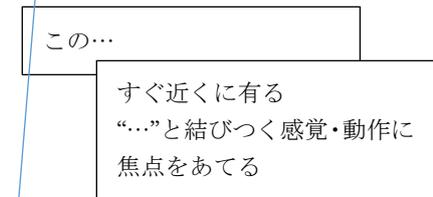
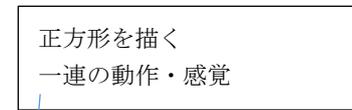
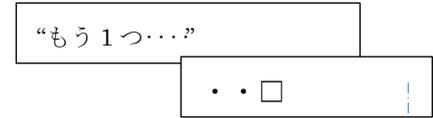
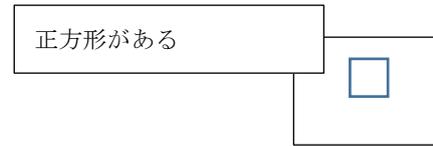
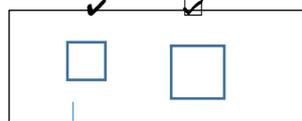
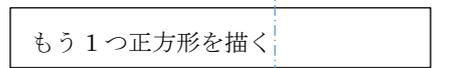
人 / 別の機械は、機械に、”長さを2倍にする”，”正方形の広さを2倍にする”，”三角形の広さを2倍にする”をやらせる。機械は、”長さを2倍にする”をやる。次、”正方形の広さを2倍にする”をやる時、長さを測る方法を使う。辺の長さを測って、その1.4倍を求める。そして、正方形を描く。その正方形の辺の長さは、1.4倍にした値だと言う。ここで、長さが1つにならないので、他の方法があるか探る。留まる。

機械は、何かの個数あるいは水の量を2倍にするなどをやっているのだから、「ある量があること、その2倍の量があること、そして2倍にする手順がある」という仕組みを作っている。そして、何であれ、2倍にすることを試す仕組みを作っている。





記憶から取り出したのに  
外界から得ているのを入れる



やろうとする次のステップを  
記憶から取り出せない

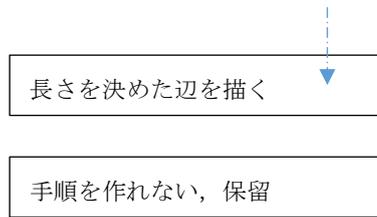


図 5. 正方形の広さを 2 倍にする. 正方形がある. もう 1 つ正方形を, 描かれている正方形の広さの 2 倍になるように, 描く.

「2 倍にする」をやるか / やれないかは, まだ分からない. 今は, 「2 倍にする」への過程はない. 記憶から取り出し, ステップを展開できない.

機械に図 6 に示すような並んだタイルを入力する. このとき, 機械は「正方形の広さを 2 倍にする」という展開を留めている. 機械は, 与えられた図に何があるかを見る仕組みを取り出して実行する. 一番小さい三角形を見る. その繰り返しを見る. 小さい正方形, 三角形 2 つからなるのとその繰り返しを見る. 次に大きい三角形, 三角形 4 つからなるのとその繰り返しを見る. さらに大きい正方形, 三角形 8 つからなるのとその繰り返しを見る. 小さい三角形と大きい三角形の中間の大きさの三角形, 三角形 2 つからなるのとその繰り返しを見る. その三角形 2 つからなる正方形, 三角形 4 つからなるのとその繰り返しを見る.

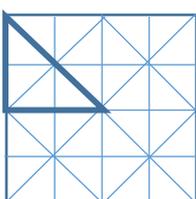
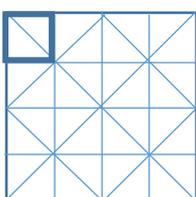
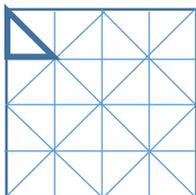
機械は, 2 つの正方形があつて, それらの間に広さが 2 倍という関係があるのを, 保留にしている展開と, 与えられた図において見る. 正方形の広さを 2 倍にするという問いは, 2 つ正方形があつて, それらの広さには 2 倍の関係があつて, 1 つの正方形は入力で, もう 1 つの正方形は目標になることと結びついている.

外界から

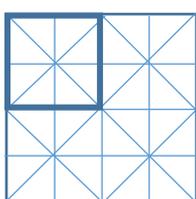
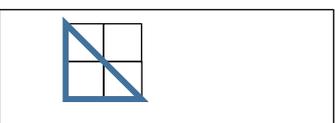
記憶から取り出したのに  
外界からのを入れる

記憶から取り出す

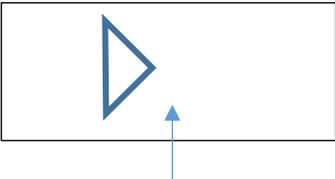
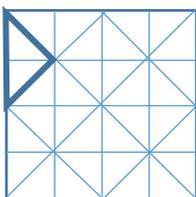
敷いたタイルを見る



正方形の広さは三角形 2つ  
と同じ



正方形の広さは三角形 8つ  
と同じ



全体を見る

繰り返しを見出すように焦  
点をあてる

繰り返しがある

三角形がある

三角形が繰り返す

すでに得ている図を見出  
すように焦点をあてる

四角形がある

縦と横の長さが同じ四角形  
は正方形だ

正方形は直角三角形から成  
る

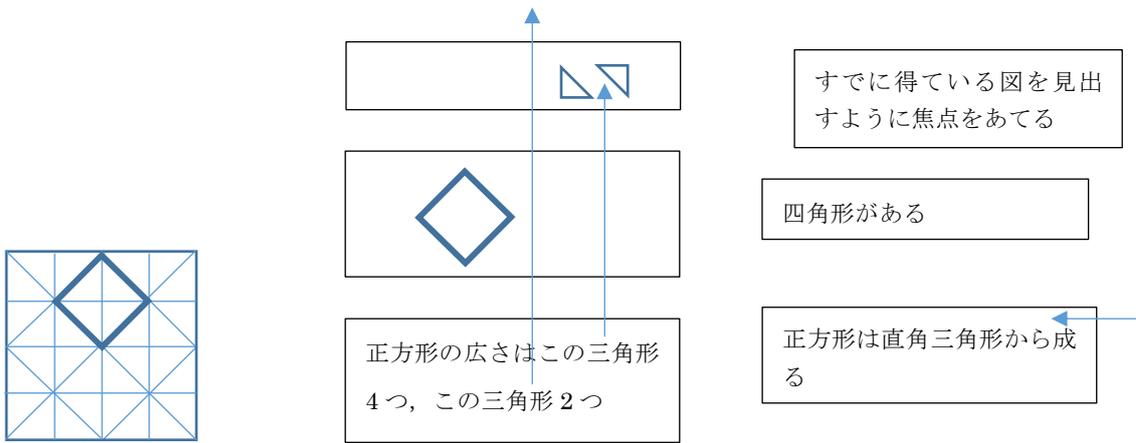
すでに得ている図を見出  
すように焦点をあてる

三角形がある

四角形がある

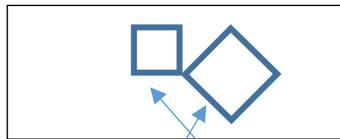
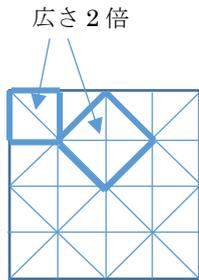
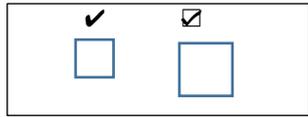
正方形は直角三角形から成  
る

三角形がある



保留にしている展開

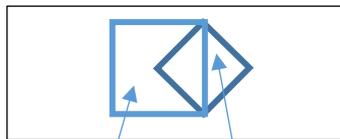
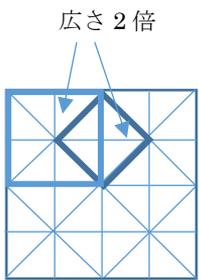
その広さ☑はこの正方形✓の2倍



焦点を当てると保留の関係となるように焦点をあてる

この正方形はこの正方形の2倍

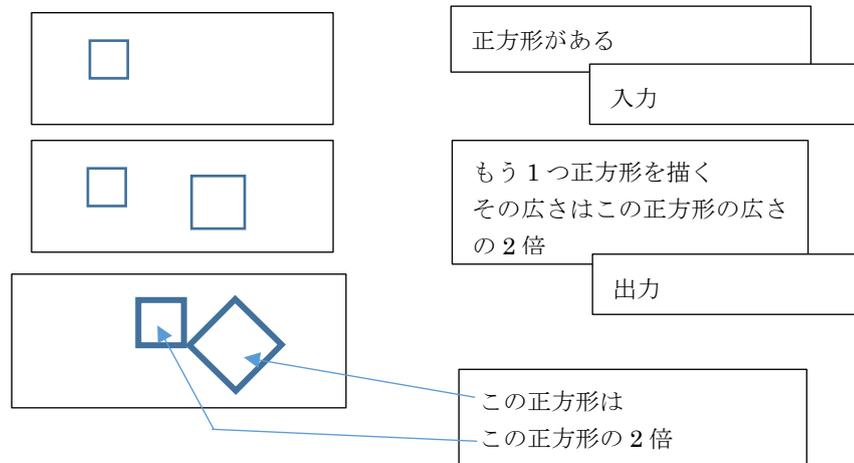
2つの正方形の広さを比べる、タイルの枚数を比べる



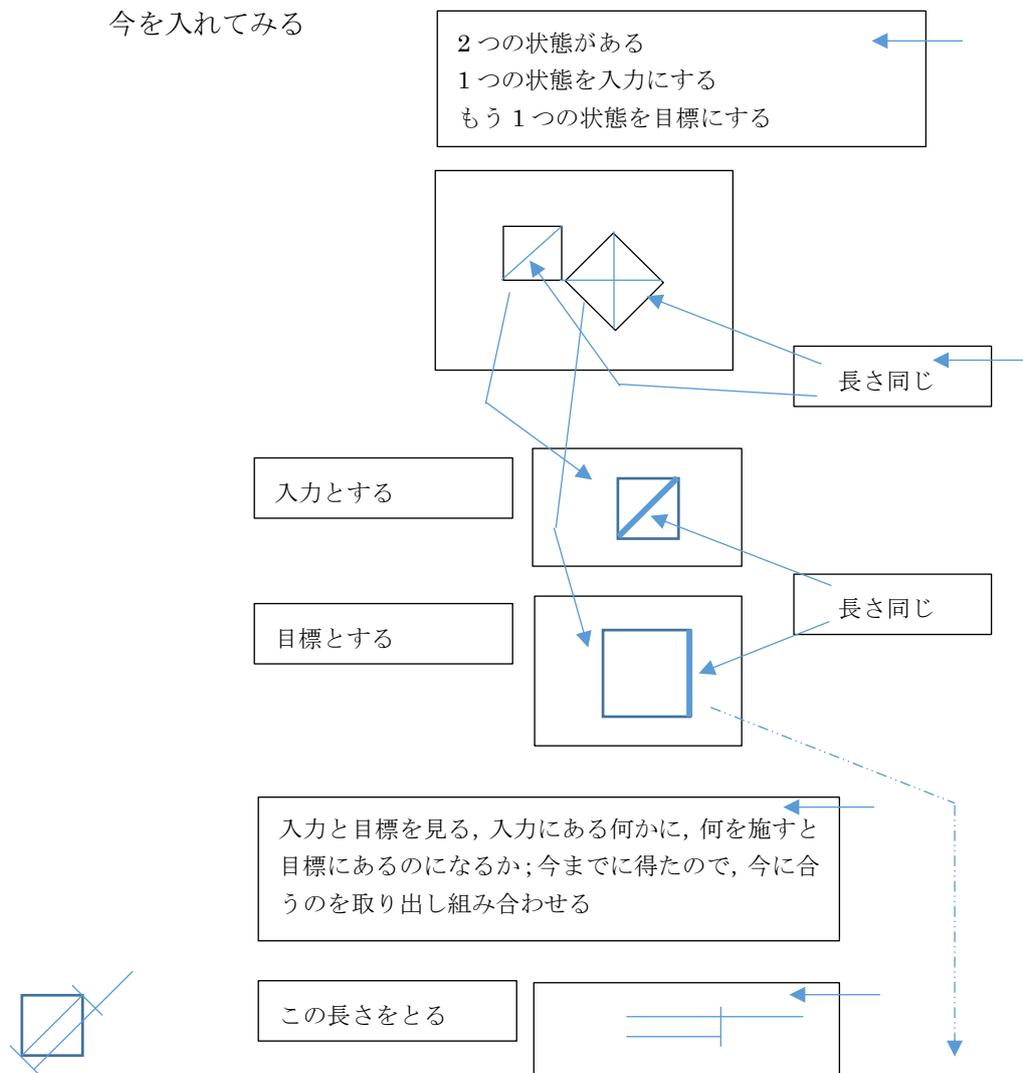
この正方形はこの正方形の2倍

図 6. 焦点をあてる対象の間において、広さが2倍の関係が浮かび上がる。

今、展開していること



記憶から取り出した仕組みに  
今を入れてみる



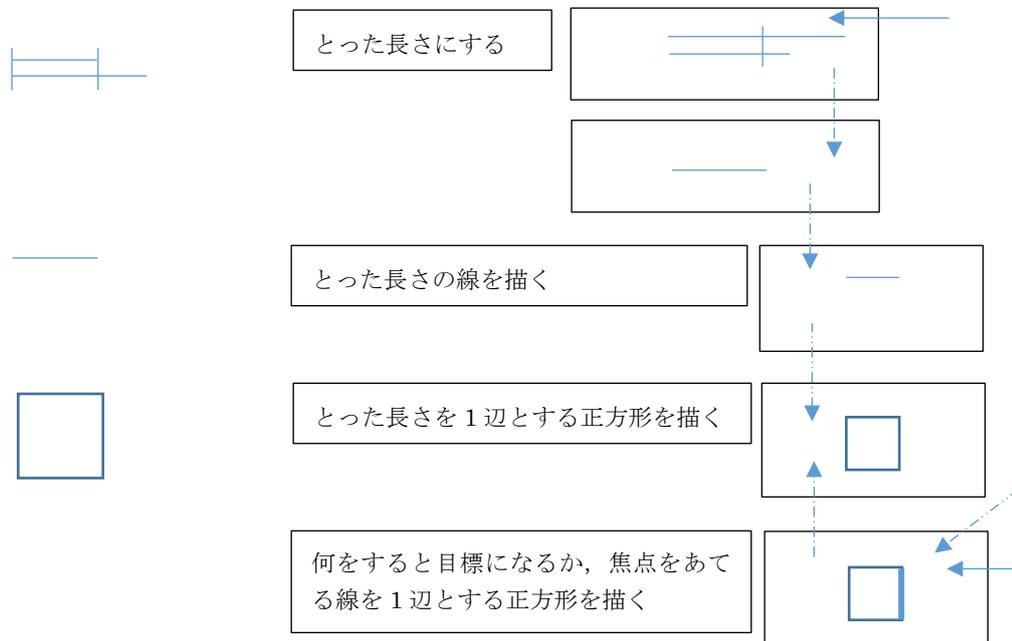


図 7. 入力の子方形の広さを 2 倍にする.

機械は、保留していること——1つの正方形がある。もう1つの正方形を、その広さが今ある正方形の広さが2倍になるように、描く——を展開している。また、2つの正方形において、広さが2倍となる関係を見出し、それを展開している。そこで、機械は、2つの展開に共通すること——2つの正方形があり（2つの状態があり）、1つの広さはもう1つの広さの2倍——から、1つの状態を入力に、もう1つの状態を目標とする仕組みを取り出す。その仕組みに今を入れ、見ている2つの正方形のうち、広さが2倍となる正方形を目標に、もう1つの正方形を入力としてみる。

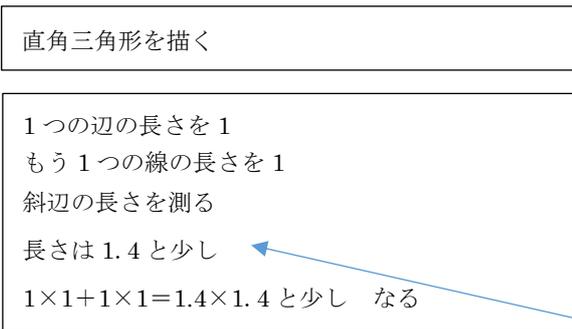
機械は、入力から目標への経過を作るためだが、何をするか調べる仕組みを取り出して実行する。何をするか調べる仕組みは、記憶している手順を取り出して組み合わせるのだが、それに今を入れる。結果、入力の対角線の長さが、目標の正方形の辺の長さと同じなので、対角線を取り出す、それを描く、描いた線を辺とする正方形を描くことを実行する。

### 2.3 描いた斜辺を1つの辺とする正方形

機械は、図4に示したように、1つのことを保留している。それは、直角三角形の斜辺の長さは、機械の間で同じになるか、1つになるか。どのようにすると、同じになるかだ。そのとき、機械は、直角を挟む2つの辺の長さ、斜辺の長さ、それぞれの辺を1つの辺とする正方形の広さ、斜辺を1つの辺とする正方形の広さの間にある関係、特に、2つの辺の長さは1、それぞれの辺を1つの辺とする正方形の広さは1、斜辺の長さを測ると1.4と少し / 1.5より少し短い、斜辺を辺とする正方形の広さは2となるかを見ている。また、その斜辺の長さは、辺の長さが1の正方形の対角線の長さと同じ、を見ている。

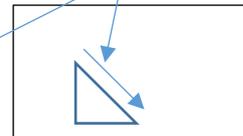
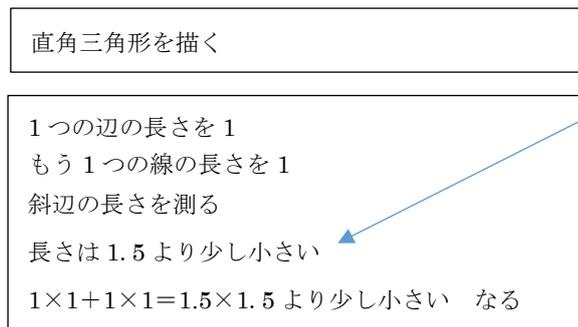
展開していること

機械 M



同じ

機械 N



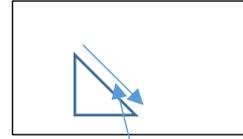
同じでない

目標とすること——貫すること

機械 M

直角三角形を描く

1つの辺の長さを1  
 もう1つの線の長さを1  
 斜辺の長さ \_\_\_\_\_  
 $1 \times 1 + 1 \times 1 = \_\_ \times \_\_ \text{ なる}$

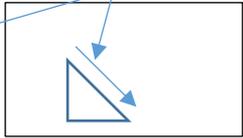


同じ

機械 N

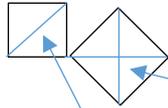
直角三角形を描く

1つの辺の長さを1  
 もう1つの線の長さを1  
 斜辺の長さ \_\_\_\_\_  
 $1 \times 1 + 1 \times 1 = \_\_ \times \_\_ \text{ なる}$



同じ

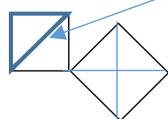
展開していること



この正方形の広さは  
 この正方形の広さの2倍

対角線の長さをとる

とった長さを正方形の辺の  
 長さとする



直角三角形

斜辺の長さをとる

汎化していること

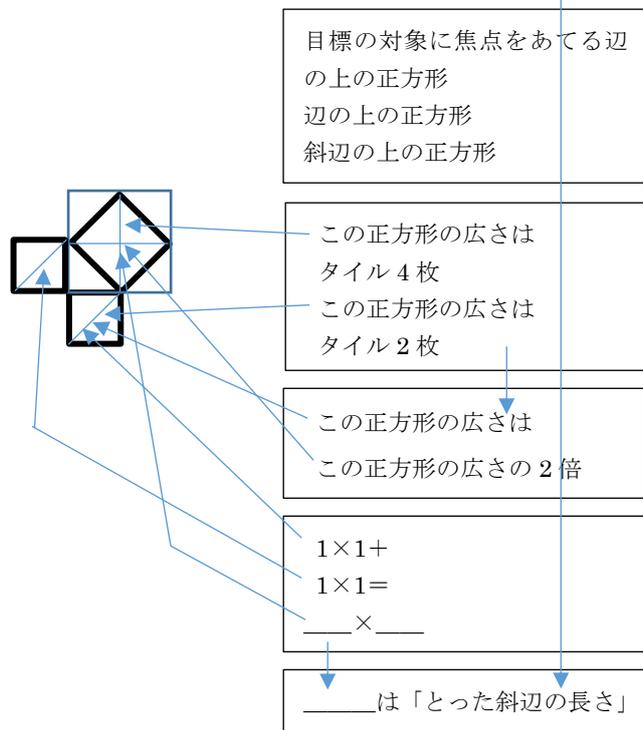
・の長さをとる

・を正方形の辺とする

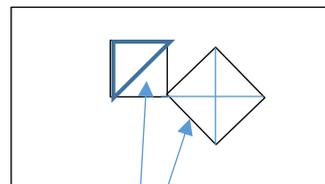
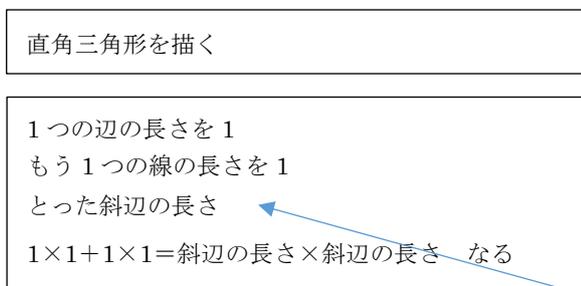
記憶していること

対角線の長さは  
 斜辺の長さと同じ

目標に達するか——展開することは一貫するか

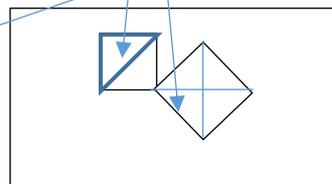
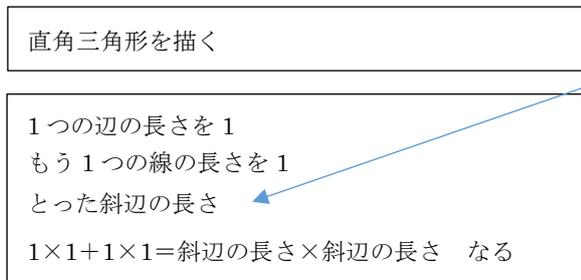


機械 M



同じ

機械 N



同じ

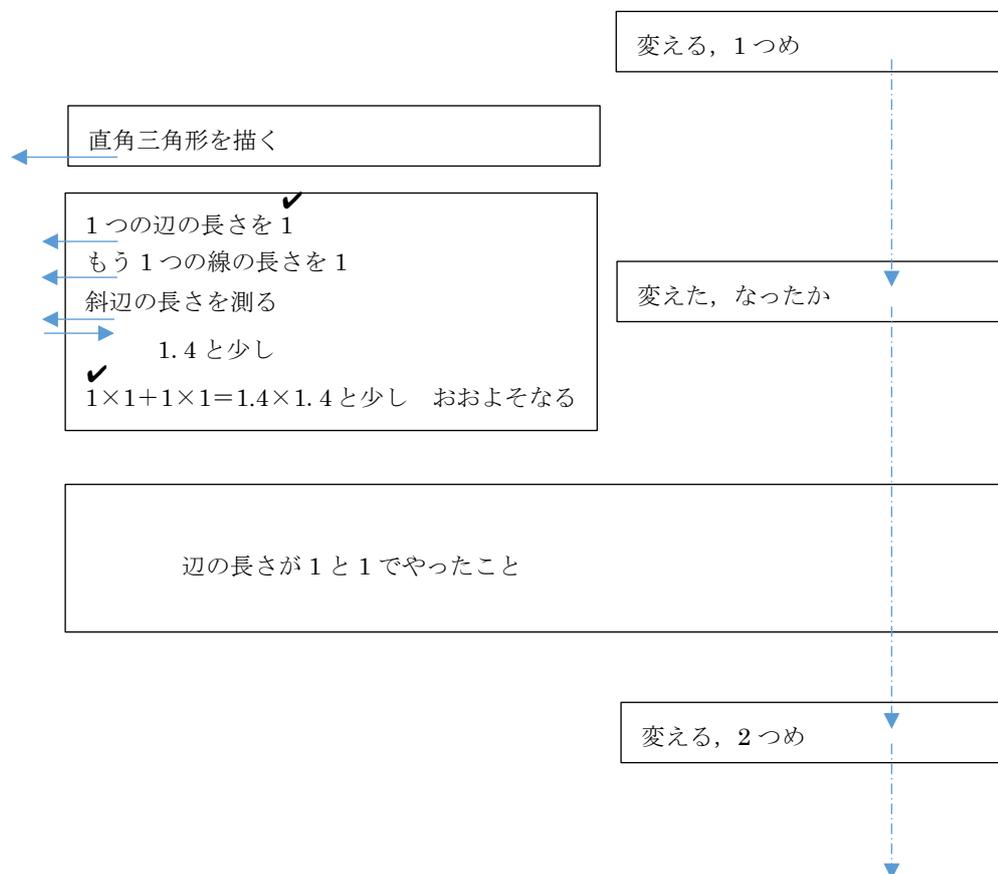
図 8. 「長さは同じ」で一貫するのを見出す.

機械は、記憶にある、紐を伸ばして、何らかの長さを紐にとる作業に、今 — 対角線の長さ — を入れる。紐を伸ばして、対角線の長さをとる。

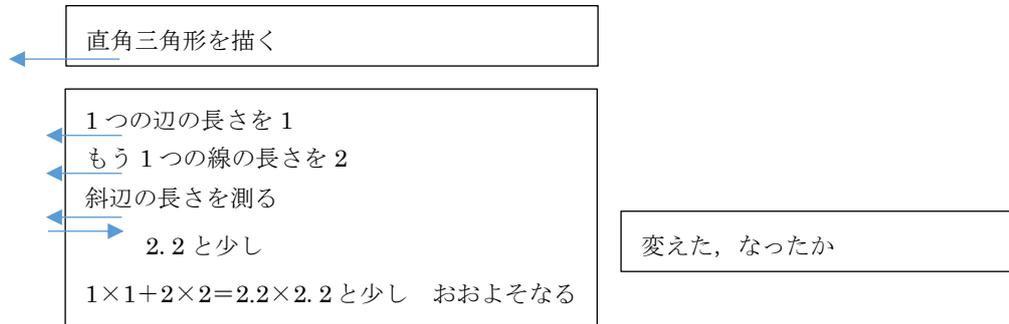
機械は、タイルの図において、斜辺の長さは、対角線の長さであることを見ている。とった対角線の長さが、正方形の辺の長さとなる。つまり、直角を挟む2つの辺の長さが1と1の直角三角形の斜辺の長さを取り、とった長さを正方形の辺の長さとする。

目標は達成できるか。つまり、上で述べたことを、別の機械が言っても、同じとなるか。斜辺の長さは、どの機械が言っても1つだ。かくして、何であれ、その長さは同じ、1つだという機械Pの謂と一貫する。

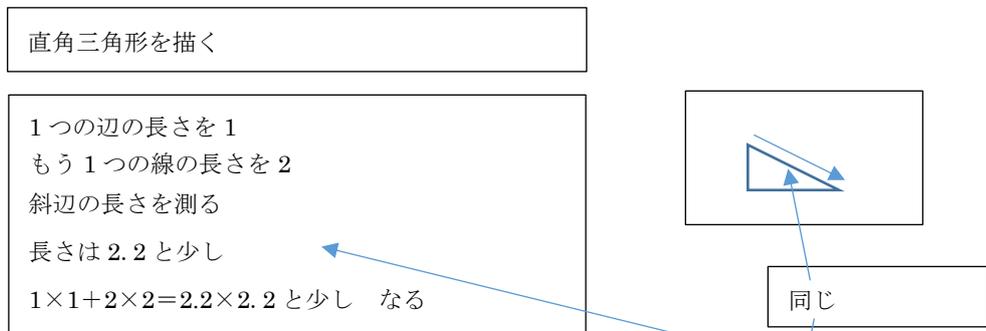
さらに、機械は、セクション2.1で保留にしたことを取り上げる。直角を挟む2つの辺の長さが1, 2の直角三角形においても、斜辺の長さは同じ、1つだということで、一貫するか、をやる（調べる）。



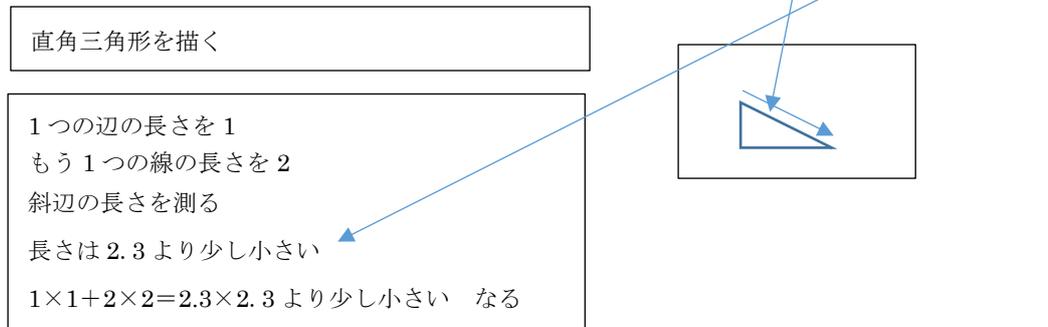
保留したこと



機械 M



機械 N

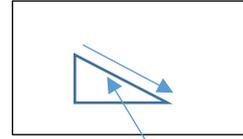


目標とすること—— 一貫するか

機械 M

直角三角形を描く

1つの辺の長さを 1  
 もう1つの線の長さを 2  
 斜辺の長さを \_\_\_\_  
 $1 \times 1 + 2 \times 2 = \_\_ \times \_\_ \text{ なる}$

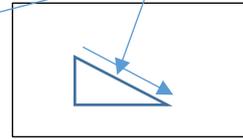


同じ

機械 N

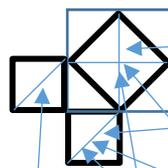
直角三角形を描く

1つの辺の長さを 1  
 もう1つの線の長さを 2  
 斜辺の長さを \_\_\_\_  
 $1 \times 1 + 2 \times 2 = \_\_ \times \_\_ \text{ なる}$



同じ

すでにやったことで一貫すること



目標の対象に焦点をあてる  
 辺の上の正方形  
 辺の上の正方形  
 斜辺の上の正方形

この正方形の広さは  
 タイル 4 枚  
 この正方形の広さは  
 タイル 2 枚

この正方形の広さは  
 この正方形の広さの 2 倍

$1 \times 1 +$   
 $1 \times 1 =$   
 $\_\_ \times \_\_$

$\_\_ \text{ は「とった斜辺の長さ」}$

一貫することを汎化して、今を入れてみる

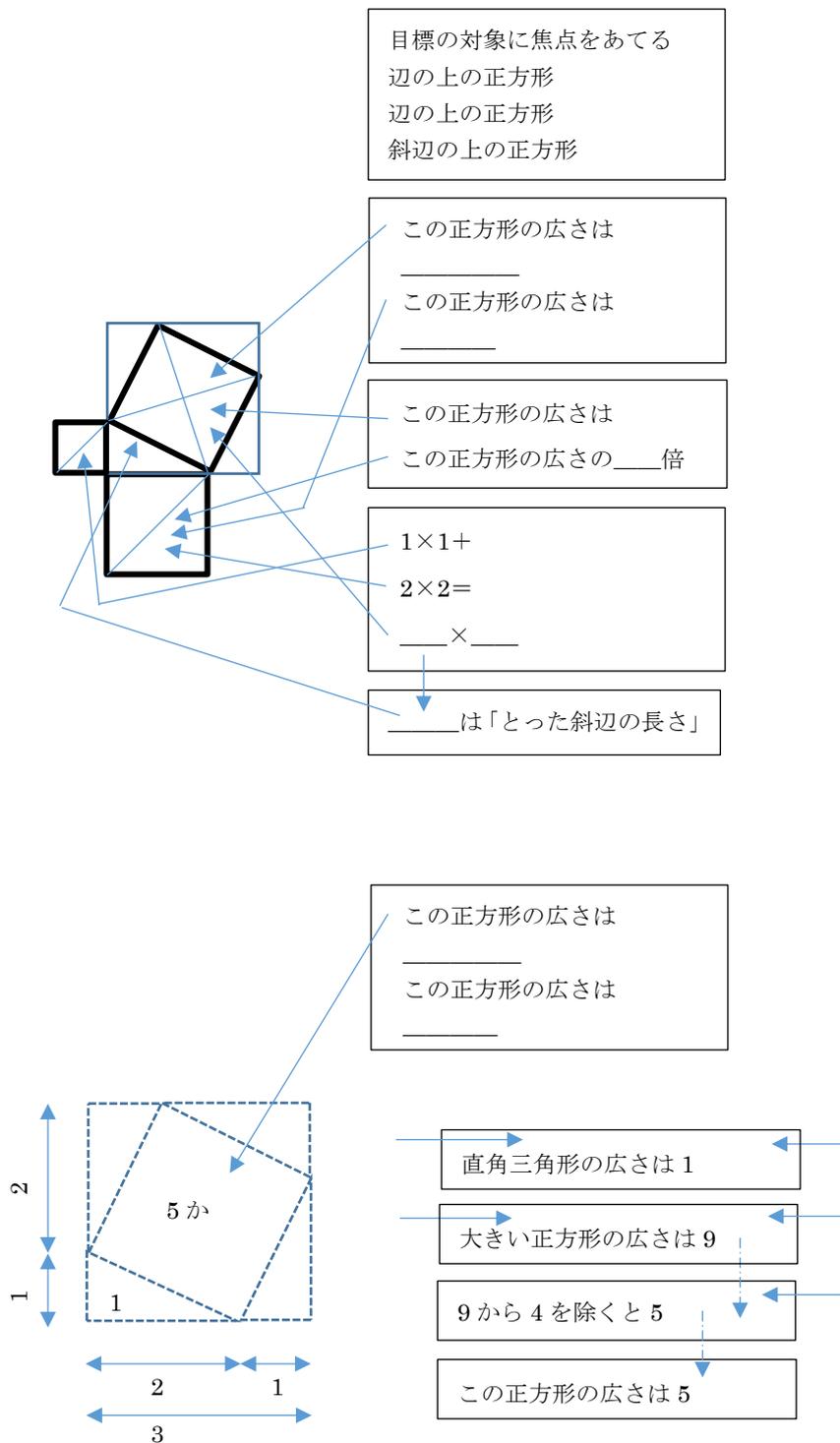


図 9. 2つの辺の長さが1と2の直角三角形. 一貫するか.

### 3. 三平方の定理を見出す

#### 3.1 描いた長さ — 任意に長さをとる

機械は、いくつかに通することを見出すと、共通しないこと、つまり変わることが、さらに変わっても、共通することがなるかを調べる仕組みを作っている。ここでは、「直角を挟む2つの辺の長さ」を変えても、「辺の長さに自身をかけたのと、もう1つの辺の長さに自身をかけたのを加えると、斜辺の長さに自身をかけたのと同じになること」が共通することを見出した。このとき、直角を挟む辺の長さを1, 2, 3などと指定するが、斜辺の長さは測って得るのでなく、描かれている長さをとった。そして、同じになることを得た。

一方で、機械は、何か対象があって、それが何個かあるという状態を仕組みとして作っている。その状態、仕組みと繋がる、4つの仕組みを作っている。図10参照。また、何か対象の長さについても、対象には長さがあるという仕組みを作っている。その長さがあること、仕組みと繋がる、5つの仕組みを作っている。図11参照。(機械が、図10, 図11に示す仕組みを作ることは別途示す。)

機械は、直角を挟む辺の長さを変える、しかも、変える長さを、5つの仕方で指定してみる。すでに、3つの仕方をやった。あと2つは、すでに斜辺の長さをとることでやっている。直角を挟む辺の長さを、2つの仕方で指定してみる；直角を挟む辺の長さは(自分が / どの機械かが)描いた長さとする。すると、辺の長さに自身をかけたのと、もう1つの辺の長さに自身をかけたのを加えると、斜辺の長さに自身をかけたのと同じになることを得るか。

機械が得ていること

機械が得たことを汎化したこと

豆がある  
いくつあるか数える  
7個ある

・がある ・がある 繰り返し  
いくつあるか数える  
\_\_ある

豆がある  
豆をつかむ  
いくつつかんだか、数える  
13個つかんだ

・がある ・がある 繰り返し  
・を..  
いくつ..たか数える  
\_\_..た

豆がある 豆を 10 個とれ 10 個とった	・がある ・がある 繰り返し ・を_.. ・を_..た
豆がある 豆 豆 ... 豆をつかむ つかんだだけ投げる	・がある ・がある 繰り返し ・を..... .....をやっただけ..する

上の 4 通りを繋ぐ汎化したこと

・がある ・がある ... (繰り返し) ・に何か作業を行う
---

図 10. 対象がいくつかある状態と、数える作業との関係を作っている。関係は 4 通りある。そのうちの 1 つは、対象はいくつあるか数えていない時も、対象の数はある（決まっている）という関係だ。

機械が得ていること

機械が得たことを汎化したこと

線がある 線の長さを測る 22	線がある 線の長さを測る —
線を描く 長さが 30 となるように描く	線を描く 長さが_となるように描く
線を描いた 長さはどれだけか、長さを測る 15	線を描いた 長さはどれだけか、長さを測る



上の5通りを繋ぐ汎化したこと

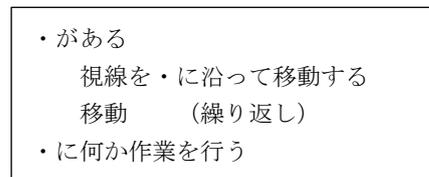
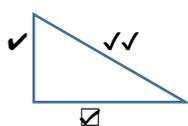


図 11. ”線を描く”, ”線がある”を, 線の方に線があるだけ (線の端から端まで) 移動することを結びつけている. その結びつきは, 「測る」との関係を 5 つ保持する. そのうちの 2 つは, 線はあって (あるいはこれから描くのがあって), 線の長さはどれだけか測っていないが, 線の長さはある, 決まっているという関係だ.

機械は, 直角三角形において, 辺の長さが変わる, そのとき, 辺の長さの間にある関係が成るか調べることを展開している. すでに, 図 11 に示す 3 つの場合を調べた. 機械は, 4 つ目, 5 つ目の場合はどうか問う. 4 つ目, 5 つ目の場合—辺の長さを測っていないが, 長さはある場合—を, 調べるに入れる. 入れると, 直角三角形がある. 辺の長さは描いただけ. もうひとつの辺の長さは描いただけ. このとき, 辺の長さに自身をかけたのと, もうひとつの辺の長さに自身をかけたのを加えると, 斜辺の長さに自身をかけたのと同じ, を調べる, となる.

### 3.2 描いた長さで成り立つ — 三平方の定理の発見

機械は、直角三角形を描くとき、辺の長さを決めるに際して、図 11 に示す上の 3 つはやった。そこで、4 つめの決め方をとる。各辺の長さは、描いただけの長さだ。そのように決めると、1 つの辺の長さに自身をかけたのと、もう 1 つの辺の長さに自身をかけたのを合わせると、斜辺の長さに自身をかけたのと同じ、となるか、を調べる。



展開する

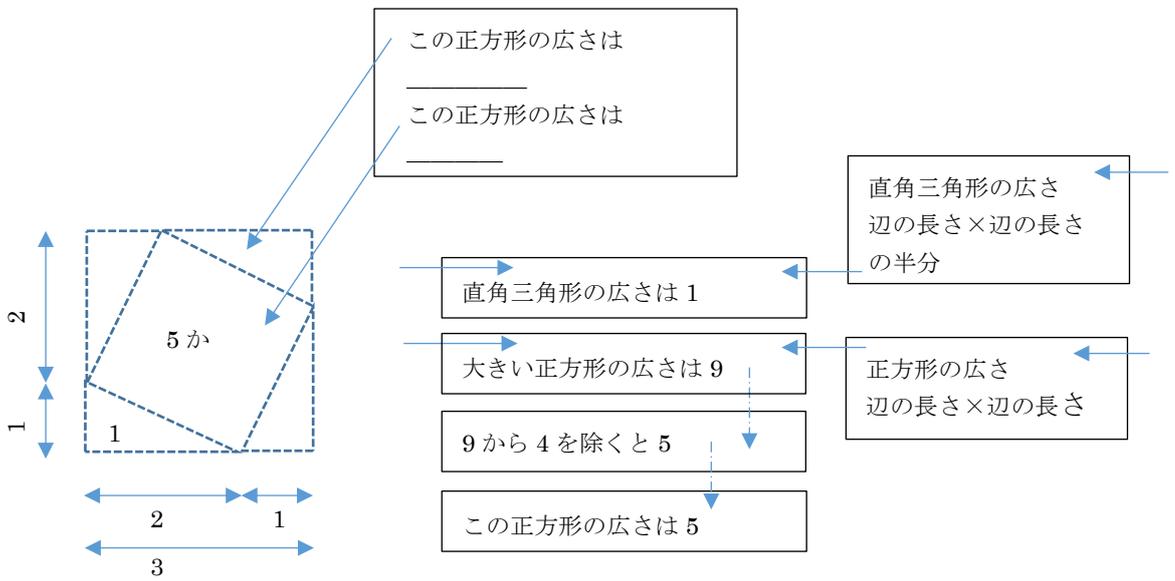
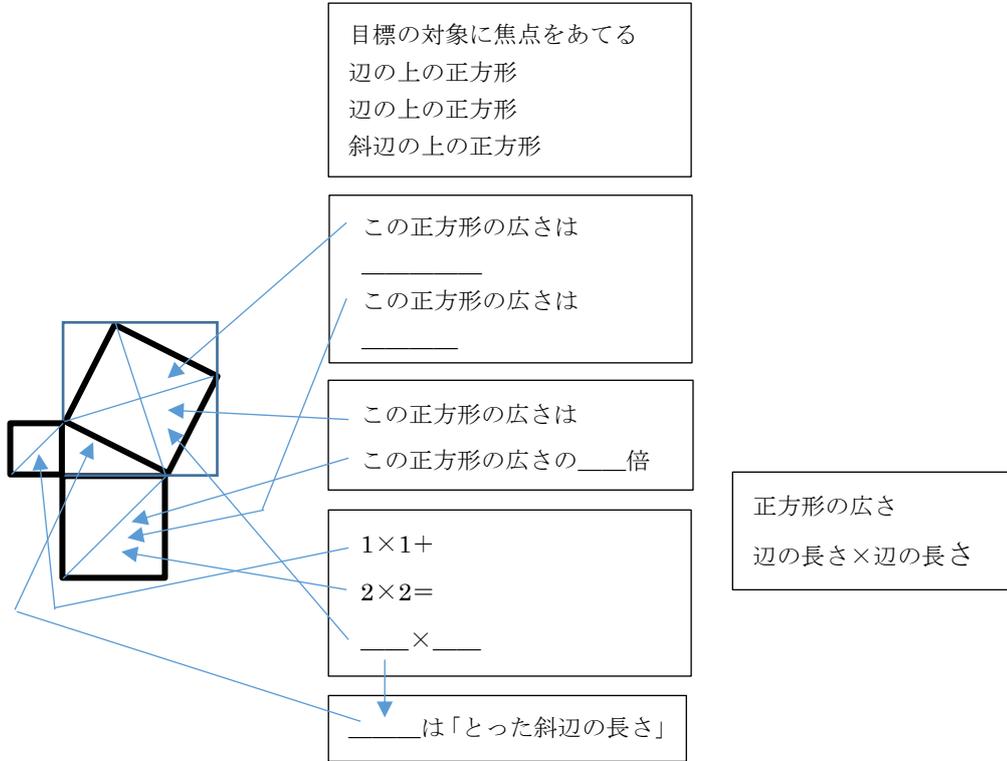
記憶から取り出す

- 直角三角形を描く
- 辺✓の長さは、描いた長さ
- 辺☑の長さは、描いた長さ
- 斜辺✓✓の長さは、描いた長さ
- 辺✓の長さ×辺✓の長さ+  
辺☑の長さ×辺☑の長さ=  
斜辺✓✓の長さ×斜辺✓✓の長さ  
なるか

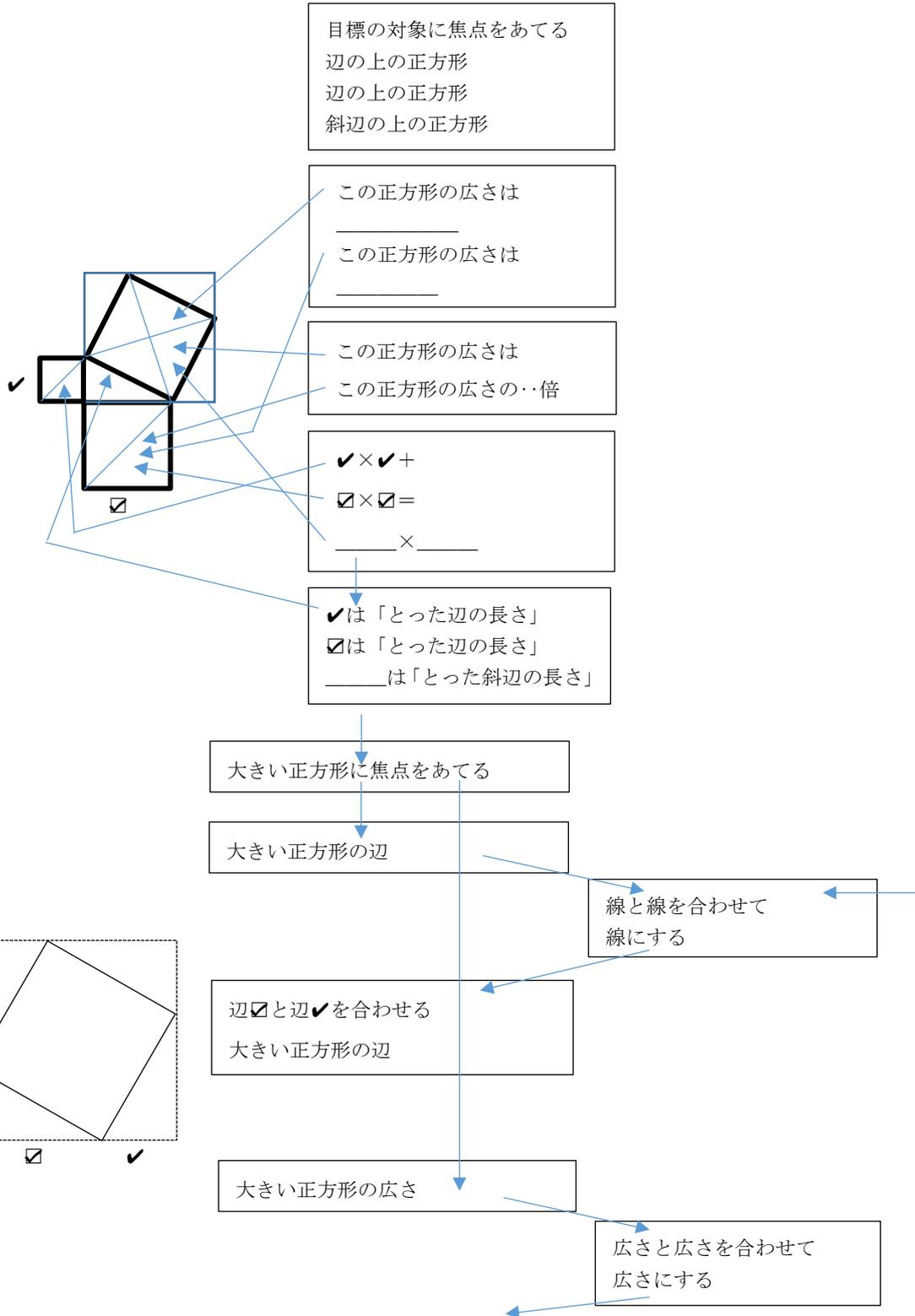
- …描く
- …長さ
- 描いた長さ
- …測る
- で長さをとる
- 直角三角形
- 辺
- 斜辺
- 辺の長さ×辺の長さ+  
辺の長さ×辺の長さ=  
斜辺の長さ×斜辺の長さ
- 機械\_が斜辺の長さを測る  
•…  
機械\_が斜辺の長さを測る  
•…  
<同じ>
- <同じでない>
- 長さは1つ、長さは同じ



記憶から取り出す



記憶から取り出したのを汎化して  
今を入れる



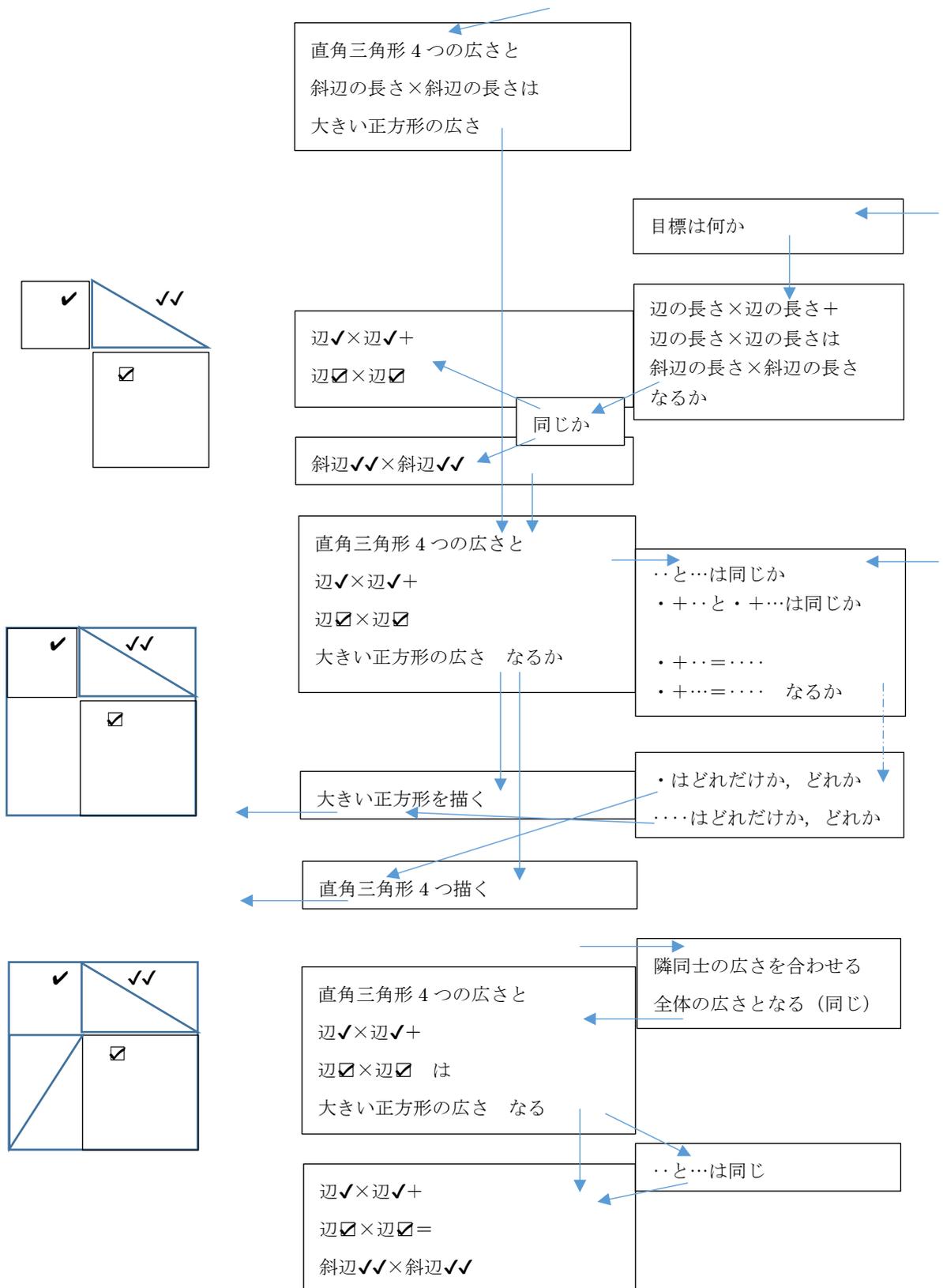


図 12. 三平方の定理の発見.

機械は、直角三角形があつて、1つの辺の長さを自身にかけたのと、もう1つの辺の長さを自身にかけたのを加えると、斜辺の長さに自身をかけたのと同じになる、の説明を、他の機械にする。機械は、他の機械とすることを共有する、つまり、言うことが互いに一貫するようにする。

機械は、3つの辺の長さの間に成り立つことに記号をつける；直角三角形がある、3つの辺の上の正方形の広さの間に成り立つ関係（三平方の定理）。

機械は、他の機械と、定理を共有する目標に達するために、2つのことを行う。1) 説明する順序を守る。つまり、すでに説明したことを使って、新たに説明する。2) 説明の中に、繰り返しとなる説明を、括り出す。括りだしたのに共通することを見出し、変わる部分をその代表で説明する。2-1) 繰り返す部分と結びつく記号を作る。2-2) 作った記号を使って、繰り返しとなることを、全体の説明より前に説明する。2-3) 全体の説明において、繰り返しの部分を、作った記号で説明する。このとき、変化する部分の代表を、そこに合うようにする説明を行う。

機械が、上に述べた2つのことをどのように行うか、その詳細については、別途述べる。特に、元から保持する機能が、どのように、繰り返す部分を見出すか、どのように、繰り返す部分において変わる部分の代表を見出すかを述べる。また、説明の順序を守る仕組みが、繰り返す部分を、全体より前に説明するようにするかを述べる。