バビロニア数学の代わりの見方

2018 年 4 月*

岩間憲三

あらまし

古代バビロニアの人たちは，後に言う，幾何学の問いを作り，解いていた．問いと解き方は粘土板に刻まれて残っている．その 1 つは，長方形の面積，縦と横の長さにある関係を使って，縦あるいは横の長さを求めること，1 つは，等脚台形の傾斜，面積，上辺の長さが与えられているとき，その底辺の長さを求めることだった．ヴァン・デル・ヴェルデン，あるいは伊東俊太郎は，古代バビロニアの人たちは，求める際，特定の代数的関係を使っていたはずだと主張する．

彼らが主張する代数的な関係というのを，彼らは定義していないが，抽象的な数学的対象の間にある関係であるとする．この主張に対する反論は，文字記号が発明されていない当時，どのように，抽象的な数学的対象とそれらの間の関係を，相手に伝えたのか，疑問が生じることに基づいている．

ここでは，2 つの問いの答えを，図にある部分と部分の間にある関係を使って求めることを示す．それらの解き方であれば，粘土板に記された解き方にある数値，2 あるいは 4 が，部分と部分の関係の中に，自然に現れる．

そして，図を砂や粘土の上に描けば，図にある部分と部分の間にある関係を，指すことができ，関係を使い，周りの人に伝えることができる．従って，古代バビロニアの人たちは，抽象度の高い代数的な関係を使ったとするより，抽象度が低い，図中の部分と部分の関係を使ったのだろうと主張する．

＊　改版　2018 年 6 月

ヴァン・デル・ヴェルデン，そして伊東俊太郎の主張　その１

数学の黎明（ヴァン・デル・ヴェルデン），pp70-73，そして，ギリシア人の数学（伊東俊太郎），pp58-64，において，以下の主張がある．

彼らは，古代バビロニアの１つの問いとそれを解く手順を述べる．問いは，「長さと幅を掛け合わせ，面積を得た．次に，長さが幅を超える分を面積に加えると，183．さらに，長さと幅を加えると，27．長さ，幅，面積はいくらか」だ．

ここで，今日的に言うと，面積は長方形の面積，長さは長方形の横，幅は長方形の縦だ．

解く手順は，

27＋183＝210

2＋27＝29　(1)

29 を 2 分する，14.5　(2)

14.5 かける 14.5 は，210.25

210.25－210＝0.25

0.25 の平方根は，0.5

14.5＋0.5＝15

14.5－0.5＝14

14 から 2 を引くと，12．幅は 12.

と記されている．（古代バビロニアの人たちは，数を，10 進法でなく 60 進法で表した．また，＋，－，＝を言葉で表した．）

ヴァン・デル・ヴェルデンも伊東俊太郎も，上の問いと解く手順を，今日的な未知数を使って置き換える．すなわち，x を長さ，y を幅とすると，

$$xy + x - y = 183$$

$$x + y = 27$$

ここで，y’ を次のように導入する．

$$y' = y + 2 \quad y = y' - 2 \qquad (3)$$

すると，

$$xy' = 183 + 27 = 210$$

$$x + y' = 27 + 2 = 29$$

そして，古代バビロニアの解き方のはじめの 2 行（1）は，問いを単純化するために幅 y の代わりに新しい幅　y’ を導入（3）していると説明する．

続いて，解く手順の主要部（2）は，

$$xy' = P$$
$$x + y' = a$$

のとき，公式（解法のパターン）

$$x = 1/2\ a + w \qquad (4)$$
$$y' = 1/2\ a - w$$
$$w = \sqrt{(1/2\ a)^2 - P}$$

を適応したものだと述べる．

さて，ヴァン・デル・ヴェルデンも伊東俊太郎も，（3）において，2 が現れるが，どのようにして 2 を見出したかは語っていない．2 を見出せば，未知数の間の関係を，公式を適応できる形に変形できる．

代わりの説明　その 1

ヴァン・デル・ヴェルデンあるいは伊東とは大きく異なる解き方を示す．縦と横を加えると 27．広さに，縦と横の差を加えると 183.

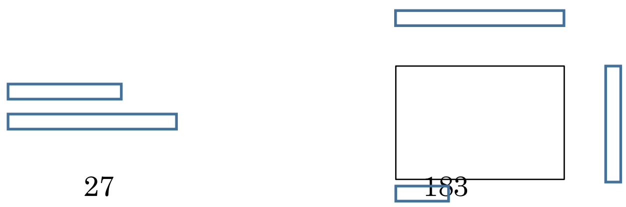


図 1.　縦と横を加えると 27，広さと縦と横の差を加えると 183.

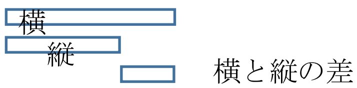


図 2.　縦と横の差.

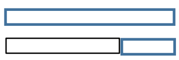
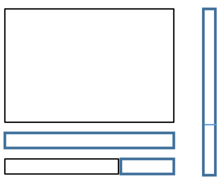


図 3.　縦と横を加える，それに，縦と横の差を加える．横が 2 つとなる．

縦と横を加えたのに，さらに，縦と横の差を加えると，横が 2 つとなる．図 3 を参照．長方形に，横 2 つを加えると，図 4 の左側のようになる．その広さは，183 と 27 を加えた 210 となる．



縦の長さは，元の縦の長さに 2 を加えた長さ．

図 4.　広さと縦と広さの差を加えたのと，縦と横を加えたのは，183 と 27 を加えた 210.

広さが 210 の長方形があるとみなすと，その縦の長さは，元の縦に 2 を加えた長さとなる．だから，広さが 210 の長方形の横と縦を加えると 29 となる．この問題は，すでに解いたことがある型と同じ．

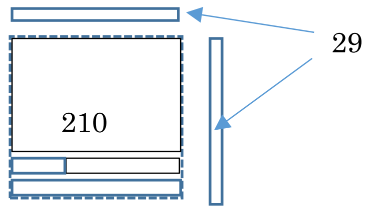


図 5．広さが 210，横と縦の長さを加えると 29.

ここで注意したいことは，(1) あるいは (3) に現れる 2 だが，ヴァン・デル・ヴェルデンあるいは伊東俊太郎の議論には，なぜ 2 なのかの説明がない．ここでは，図 3 で示すように，横の長さ 2 つ分の 2 であって，横と縦を加え，さらに横と縦の差を加えると，自然に出てくる値になる．

さて，すでに解いたこと，つまりヴァン・デル・ヴェルデンが公式とした，あるいは伊東が解放のパターンとしたこと (4) も，図にある同じことを見出すことで得ることができる．これについては，次の問いの後に述べる．

ヴァン・デル・ヴェルデン，そして伊東俊太郎の主張　その 2

数学の黎明（ヴァン・デル・ヴェルデン），pp76-77，そして，ギリシア人の数学（伊東俊太郎），pp68-70，において，以下の主張がある．

バビロニア人は和 $x+y = 2h$ が与えられるとき，

$$x = h + w$$

$$y = h - w$$

とおいて，それから w を求めようとした．さらに積 P も与えられれば，

$$xy = (h+w)(h-w) = h^2 - w^2 = P$$

となるが，

$$w^2 = h^2 - P$$

となるので，w の値を求めることができる．

彼らはこのような仕方で，公式

$$(h-w)(h+w) = h^2 - w^2 \qquad (5)$$

を知ったのだろう．

彼らは，この特殊な積（5）を，バビロニア人が使った代数的な関係の例だとする．そして，この関係を，以下の問いの答えを求めるときに使っていると主張する．その問いは，「等脚台形の形をした堤防の断面を作図せよ」というもので．そこに与えられているのは，「底辺 a，傾斜 $\beta =$ $(a-b)/2h$，面積 $S = (a+b)h/2$」であり，「上辺 b を求める」．

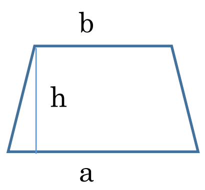


図 6.　等脚台形の高さ h，上辺 b そして底辺 a.

バビロニア人は，4 と β と S をかけて

$$4\beta S = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

を得る．これは b^2 について解くことができる．

$$b^2 = a^2 - 4\beta S$$

もし特殊な積（5）が知られていなかったとすれば，これらのことはいずれも全く説明しがたいであろう．

以上が，ヴァン・デル・ヴェルデンそして伊東俊太郎による，古代バビロニアの１つの問いと求め方についての説明だ．

この中で，4 と β と S をかけることが現れる．この 4 は，

$\beta = (a-b)/2h \qquad 2\beta = (a-b)/h$

$S = (a+b)h/2 \qquad 2S = (a+b)h$

からとったというのが，彼らの主張のようだ．特殊な積（5）が念頭にあれば，b^2 を求めるに至る道筋の中に，4 と β と S をかけることが位置づくからだ．

実際，4 は，

$b^2 = a^2 - (a-b)(a+b)$

が念頭にあれば，続いて，

$a^2 - (a-b)(a+b) = a^2 - (a-b)/h \times (a+b)h = a^2 - 2\beta \times 2S = a^2 - 4\beta S$

となるので，得ることができる．

もちろん，以上の説明には，

$4\beta S = a^2 - b^2$

と対応する，図の部分と部分の間における関係は出てこない．

代わりの説明　その 2

等脚台形と台形の中の三角形，台形を拡張する四角形を描く．それらの図において，どの部分とどの部分が等しいか追いかけると，バビロニア人が残した解き方を得ることができる．しかも，等しい部分が 4 つあると見出すことで，解き方にある 4 が自然に導き出される．

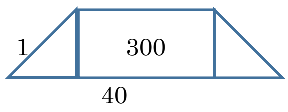
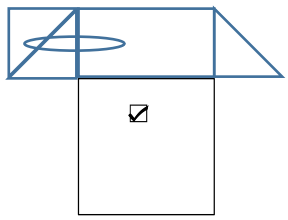


図 7．傾斜が 1，底辺の長さが 40，広さが 300 の等脚台形．

広さが 300，底辺の長さが 40，傾きが 1 の等脚台形を考える．台形の上辺を左に伸ばし，台形の傾きの下にある三角形，図 8 の△と同じになる三角形，図 8 の〇をとる．

図 8．三角形△，三角形〇，三角形□は同じ広さ．



台形の広さは長方形 の広さと同じ，300．

上辺の正方形☑を描く．

図 9．台形の広さと長方形の広さは同じ．上辺を辺とする正方形を描いてみる．

三角形□の広さは，三角形〇の広さと同じ．だから，台形の広さは長方形 の広さと同じ．

ここで，上辺の長さを辺の長さとする正方形☑を描く．さらに，

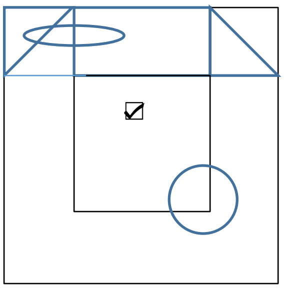


図 10. 底辺の長さを辺とする正方形を描く．

底辺の長さを辺の長さとする正方形○を描く．すると，長方形 4 つと正方形☑が，正方形○を成すことが分かる．

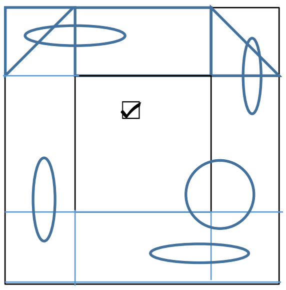


図 11. 底辺を辺とする正方形は，上辺を辺とする正方形および長方形 4 つから成る．

だから，300 を 4 倍する．1200．40 をそれ自身にかける．1600．1600 から 1200 を除く．400．400 の平方根をとる．20．上辺の長さは 20 を得る．

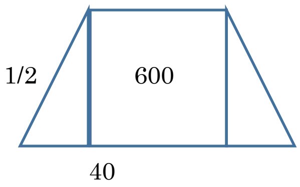


図 12. 傾きが 1/2 の等脚台形.

次に，傾斜が 1 でなく，1/2 で，広さが 600，底辺の長さが 40 の等脚台形を考える．この台形の高さを 1/2 にすると，傾斜が 1 の台形を得るが，その広さは，600 の 1/2，300 となる．すると，上辺の長さは，すでにやった方法で求めることができる．

これで，4 かける広さかける傾斜が，底辺の長さかける底辺の長さから上辺の長さかける上辺の長さを除いたのに等しいことを得る．そして，係数 4 は，長方形の広さ（つまり台形の広さ）4 つ足し合わせることだと説明できる．これで，

$$4\beta S = a^2 - b^2$$

が持つ，図の部分と部分の間における関係が現れた．

公式 / 解法のパターンの導出

ヴァン・デル・ヴェルデンも伊東俊太郎も，手順（2）を，公式あるいは解法のパターンだと言う．ここでは，古代バビロニア人が，公式あるいは解法のパターンをどのように導出したか，その可能性を述べる．

継続的に，長方形や正方形を変形して，その前後の関係を得る．典型的には，正方形の辺を伸ばす / 縮めることで，その広さがどのように変わるかを得る．

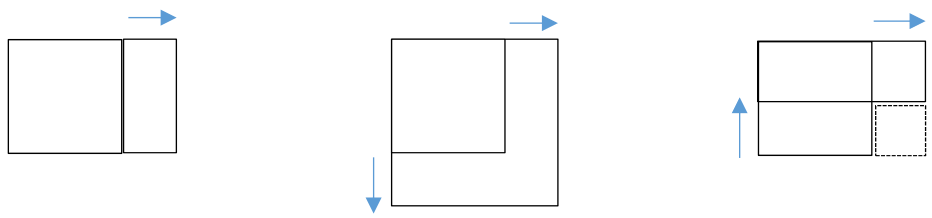


図 13．正方形を伸ばす / 縮める．できた長方形の広さ，元の正方形の広さ，伸ばす長さと縮める長さの関係を得る．

正方形の 1 辺を伸ばす，もう 1 辺を伸ばす長さと同じだけ縮める．長方形ができる．たとえば，辺の長さが 15 の正方形の 1 つの辺を 4 伸ばし，もう 1 つの辺を 4 縮める．すると，できた長方形の広さは，209．元の正方形の広さは，225 で，16 小さくなる．

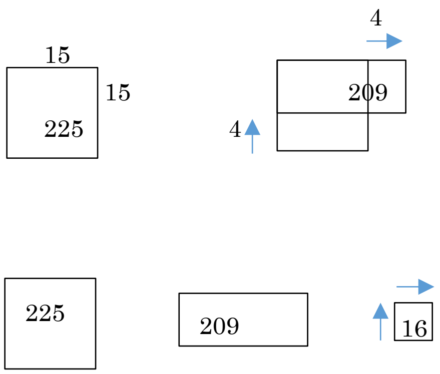


図 14．正方形の広さ，長方形の広さ，伸ばす長さと縮める長さの間にある関係．

正方形の広さ 225 から正方形の広さ 16 を引くと，長方形の広さ 209 となる．この例，あるいは他の例から，図 15 に描く関係を得る．

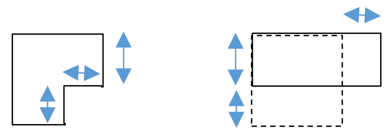


図 15．大きい正方形から小さい正方形を除く．その広さは，大きい正方形の辺の長さを伸ばし，もう 1 つの辺を同じだけ縮めてできる長方形の広さと同じ．

続いて，いくつかの問いを作り，それらに答える．正方形がある．その 1 つの辺を 7 伸ばすと，広さが 228 の長方形ができる．正方形の辺の長さはどれだけか．あるいは，1 つの辺を 6 縮めると，広さが 112 の長方形ができる．正方形の辺の長さはどれだけか．

図 16．正方形を 7 伸ばす．伸ばしてできた長方形の広さは 228．正方形を 6 縮める．縮めた長方形の広さは 112．

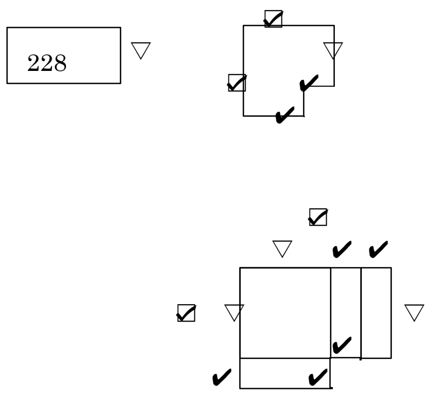


図 17．広さが 228 の長方形は，正方形から正方形を除いた図と広さが同じ．2 つを重ねると，小さい正方形（辺が✔の正方形）の辺 2 つ（✔✔）と 7 が同じだと分かる．

図 17 に示すように，何が同じかを追いかける．広さが 228 の長方形は，大きい正方形から小さい正方形を除いた図と広さが同じ．すると，大きい正方形の辺の長さ（図 17 の☑）と小さい正方形の辺の長さ（図 17 の✔）を加えると，長方形の横の長さ．小さい正方形の辺の長さ 2 つ（✔と✔）は 7．

7 を半分にする．7/2．7/2 かける 7/2 は，49/4（小さい正方形の広さ）．
228 と 49/4 を加えると，961/4（大きい正方形の広さ）．
その平方根は，31/2.　　　　　　　　　　（6）

31/2 が，大きい正方形の辺の長さとなる．

次に，正方形を，6 縮めてできた長方形の広さは 112 を取り上げる．図 18，図 19 に示すように，何が同じかを追いかける．

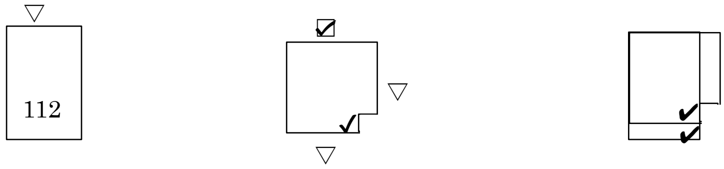


図 18．広さが 112 の長方形は，辺が☑の正方形から辺が✔の正方形を除いた図と広さが同じ．2 つを重ねる．

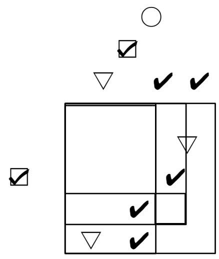


図 19. 辺が☑の正方形の外側に，辺が☑と✔の正方形を描く．すると，小さい正方形（辺が✔の正方形）の辺 2 つ（✔✔）と 6 が同じだと分かる．

すると，辺が✔の正方形を，辺が☑の正方形から除くと，長方形の広さ 112 と同じになるが，辺✔2 つ分は 6 だと分かる．

6 を半分にする．6/2．6/2 かける 6/2 は，36/4（辺が✔の正方形の広さ）．
112 と 36/4 を加えると，484/4（辺が☑の正方形の広さ）．
その平方根は，22/2．　　　　　　　　（7）

辺が☑の正方形の辺の長さは，11．6 縮める前の正方形の辺の長さは，☑と✔を加えた長さで，14．

さらに，長方形がある．その広さは 120，その縦と横の長さを加えると 23．長方形の縦の長さはどれだけかを取り上げる．やはり，何が同じかを追いかけることで，長さを求める．

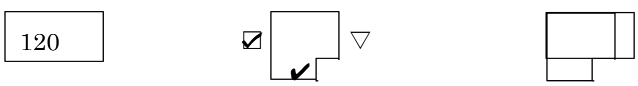


図 20. 広さが 120 の長方形は，辺が☑の正方形から辺が✔の正方形を除いた図と広さが同じ．2 つを重ねる．

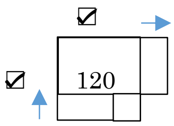


図 21．辺が☑の正方形の 1 辺を✔だけ伸ばし（→），かつもう 1 辺を縮める（↑）．すると広さが 120 の長方形となる．☑の長さ 2 つは，長方形の縦と横の長さを加えたのと同じ．

図 20 に示すように，正方形から正方形を除いた図と長方形を重ねる．すると，図 21 に示すように，辺が☑の正方形の縦と横の長さを加えると長方形の縦と横の長さを加えたのと同じになることを得る．つまり，☑の長さ 2 つは，23.

23 を半分にする．23/2．23/2 かける 23/2 は，529/4（辺が☑の正方形の広さ）．
529/4 から 120 を除くと，49/4（辺が✔の正方形の広さ）．
その平方根は，7/2.　　　　　　　　（8）

辺が✔の正方形の辺の長さは，7/2．長方形の縦の長さは，23/2 引く 7/2 で，8.

上記した（6）（7）（8）は，同じ型であることが分かる．これが，ヴァン・デル・ヴェルデンそして伊東が言う公式あるいは解法のパターンとなる．

議論

ここでは，バビロニアの人たちが，どのように問いを作り，どのようにそれを解いたか，ヴァン・デル・ヴェルデンあるいは伊東俊太郎とは異なる説明をした．今日の文字記号がない中，バビロニアの人たちが，たとえば，$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ をどのように語っていたか，どのように使っていたか，さらに，どのように頭の中で描いていたか．その見方の違いが，ヴァン・デル・ヴェルデンや伊東俊太郎の説明と，ここでの説明の差をもたらす．

ヴァン・デル・ヴェルデンや伊東俊太郎は，今日の代数的な関係，あるいはそれと同等の関係を使って議論をしていたという見方をとる．ただし，彼らは，バビロニアの人たちが，どのように代数的な関係を語っていたのかについて，筆者の知る限り，明示していない．

ここでは，図にある部分と部分の間にある関係で議論を進めたという見方をとる．たとえば，$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ は，「大きい正方形と小さい正方形の広さの差は，大きい正方形の1つの辺を伸ばし，もう1つの辺を同じだけ縮めてできる長方形の広さに等しい」と語っていた（あるいは，言い方は異なるかもしれないが同等のことを語っていた）とする．この見方であれば，バビロニアの問いと解法を，明示的に説明することができる．

文献

ヴァン・デル・ヴェルデン．（訳）村田全，佐藤勝造．1984．数学の黎明．みすず書房．

伊東俊太郎．1990．ギリシア人の数学．講談社学術文庫．

改版

図 17 に示したような重ね合わせ，長方形など図全体の重ね合わせでなく，線を重ね合わせることを試す．そして，長さが同じとなる線はどれかを見出す場合を述べる．

すでに，「正方形があって，その正方形の 1 つの辺を✔だけ伸ばし，もう 1 つの辺を✔だけ縮めると，長方形ができるが，その長方形の広さは，正方形から✔の長さを 1 辺とする正方形を除いた図の広さと同じ」という規則を見出している．この規則を使うことで，長方形の縦と横の長さを求める．

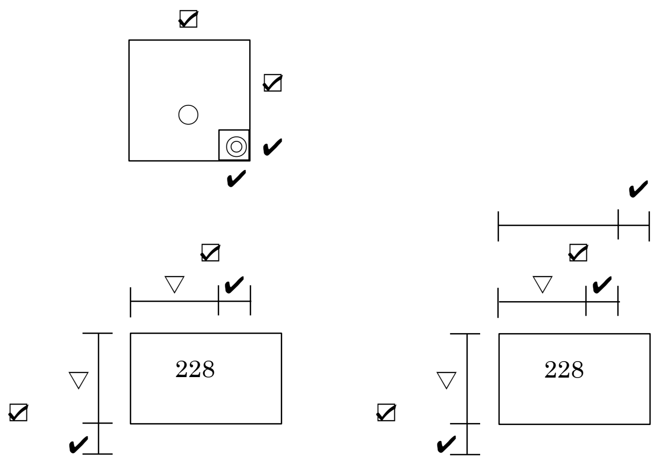


図 22．長方形があると，その広さと同じになるような，正方形○から正方形◎を除いた図がある．そして，除く正方形◎の辺の長さ✔は，正方形○の 1 つの辺を✔だけ伸ばし，もう 1 つの辺を✔だけ縮めると長方形になるような長さとなる．

長方形の横に，正方形の辺☑，それは長方形の縦▽と縮めた長さ✔を加えたのと同じだが，それを重ねる．さらに，正方形の辺☑と伸ばした長さ✔は，長方形の横の長さと同じで，それを重ねる．

すると，長方形の横は，縦▽より，✔ 2 つだけ長いことが分かる．2 つの✔と 7 が同じ．

同様に，図 19 に示したように，平面図を重ねるのでなく，線分を重なることで，長さが同じとなる線を見出すことで，長方形の縦と横を求めることができる．